

TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE.

TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE,

PAR J.-G. GARNIER,

Professeur-Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Gand, ancien Professeur aux Écoles Polytechnique et Royale militaire de S.t-Cyr, et Docteur ès-sciences de l'Université de Gand.

L'Arithmétique et la Géométrie sont les deux ailes des Mathématiques.

QUATRIÈME ÉDITION.

GAND,

CHEZ J.-N. HOUDIN, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ,

RUES CATALOGNE ET DES CHEVALIERS.

1818.

A MONSIEUR DE LENS,

Comte du Saint-Empire Romain, Chevalier de l'Ordre du Lion-Belgique, Membre de la I.re Chambre des États-Généraux, Bourguemaître de la ville de Gand et Président du Collége des Curateurs de l'Université de cette ville.

MONSIEUR LE COMTE,

VOUS aimez et vous protégez les Sciences ; l'Arithmétique en est le vestibule : vous jugerez, Monsieur le Comte, si j'ai réussi à lo bien

éclairer, et à le mettre en rapport avec le reste de l'édifice qui s'élève à une hauteur immense.

En daignant accepter l'hommage de ce Traité, vous m'avez offert l'occasion de rendre ma reconnaissance publique, et le désir de la rendre durable me fait souhaiter que cet ouvrage que j'ai travaillé avec soin et vérifié par l'enseignement, obtienne quelque succès.

J'ai l'honneur d'être,

MONSIEUR LE COMTE,

Votre très-humble et très-obéissant serviteur,

GARNIER.

DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

L'Arithmétique, indépendamment de son utilité directe, doit être considérée comme faisant avec la Géométrie, un excellent cours de logique pratique : si on veut qualifier en peu de mots ces deux sections par rapport à l'ensemble de la science, il faut répéter avec l'illustre *La Grange*, *qu'elles forment comme les deux ailes des Mathématiques.*

L'édition de l'Arithmétique que j'offre aujourd'hui, diffère des trois précédentes dans des points essentiels : car j'ai dû la mettre en rapport avec un cours complet en douze volumes dont la composition qui

m'occupe depuis plusieurs années, toucherait à sa fin, sans des circonstances qui m'ont distrait de mes travaux habituels. Je puis aujourd'hui reprendre cette vaste entreprise, avec l'espoir de la terminer et d'en publier successivement les différentes parties qui font la matière des cours dont je suis chargé à l'Université de Gand : car le plan que je m'étais tracé est précisément celui que m'impose l'enseignement universitaire.

Les changemens dont j'ai parlé, consistent sur-tout dans la restitution faite à l'Arithmétique, de plusieurs doctrines qu'on rejetait dans l'Algèbre, telles que l'extraction des racines carrée et cubique, la théorie des progressions improprement dites arithmétique et géométrique, et celle des logarithmes dont l'emploi est devenu indispensable dans les applications de l'Arithmétique aux annuités, à la solution de plusieurs cas des règles d'intérêt simple et composé, d'escompte, de change, etc., etc. En les étudiant, on reconnaîtra de plus qu'il est des questions qui, sans être pure-

ment spéculatives et même sans sortir du cercle ordinaire des besoins, exigent quelques notions élémentaires et quelques règles d'Algèbre que j'explique occasionnellement et dans des notes détachées. J'ai cru sur-tout faire une chose utile que de donner la démonstration de la règle de double fausse position, l'une des plus importantes et des plus difficiles de l'Arithmétique, et qui, dans le petit nombre de Traités où on la trouve, n'est énoncée que comme *une recette*, et est réduite à ce qu'on appelait autrefois *regula cœci*. Ainsi, dans mon plan, l'Arithmétique se suffit à elle-même et elle suffit à tous les besoins.

J'ai écrit sur toutes les parties des Mathématiques, je les ai toutes professées, et j'avoue qu'il n'en est aucune dont la rédaction et l'enseignement m'aient autant coûté que l'Arithmétique : ce n'est donc jamais sans une véritable surprise que j'entends quelques enseignans en parler dédaigneusement. Dans une distribution des cours entre les professeurs de l'école Polytechnique, l'illustre *La Grange* qui tenait le sceptre en Mathématiques, se

réserva l'enseignement de l'Arithmétique, et parce que j'étais son adjoint, il me livra une partie transcendante de la science.

Dans presque tous les Traités, et conséquemment aussi dans l'enseignement, on suppose le dispositif de chaque opération déjà connu, et on établit la théorie dans cette hypothèse qui en suppose implicitement une autre, savoir, celle de l'invention même de l'Arithmétique. Cette marche n'est pas celle que nous suivons ici : nous procédons par des questions, puisque c'est pour les résoudre qu'on a inventé l'Arithmétique : nous commençons par la plus simple; de celle-là nous passons par degrés à de plus composées qui pourtant ne sont que des particularités ou des inverses de la première ; nous les résolvons en suivant la marche de l'invention, et par des simplifications successives et qui se présentent naturellement, nous sommes amenés pour chacune au dispositif connu. Il est bien entendu que cette route de l'invention n'est pas celle des inventeurs, nécessairement très-embarrassée et très-tortueuse.

Dans les parties élémentaires d'une science,

on doit toujours procéder du simple au composé, c'est-à-dire, s'élever des cas particuliers au cas général; c'est en cela que consiste la méthode qu'on nomme *classique*, par opposition à la méthode *académique* qui embrasse une question dans sa plus grande généralité, en sorte que toutes les particularités sont comprises et comme enveloppées dans la formule à laquelle elle parvient. Mais on peut dire que, dans ces derniers temps, quelques Géomètres avides de célébrité, et qui pourtant entendaient tout aussi mal les intérêts de leur réputation que ceux de la science, ont étrangement abusé de cette permission de généraliser; ce qui a fait dire au célèbre *La Grange*, *qu'on avait assez enroulé, et qu'il était temps enfin de dérouler.*

Je me suis particulièrement attaché à bien éclaircir les notions fondamentales qui sont comme la *matière première* de la science: à cette occasion, il ne sera pas inutile d'observer que, dans les parties des Mathématiques qui sont purement *rationnelles*, tout est de l'homme qui les a composées avec un très-petit nombre de matériaux pris dans

son intelligence, tandis que dans les branches *physico-mathématiques*, il emprunte de la nature des faits qui lui sont fournis soit par l'expérience soit par l'observation : aussi les conclusions qu'il tire des sciences rationnelles ont-elles le plus haut degré de rigueur, puisqu'elles ne dépendent que d'un petit nombre de conventions et de notions incontestables; tandis que les autres résultats sont dépendans de la précision des instrumens au moyen desquels on a interrogé la nature.

A mesure que j'avance dans l'exposition de l'Arithmétique, je resserre de plus en plus l'explication et les détails de calcul, convaincu que le livre le plus fructueux, est celui qui laisse le plus à la réflexion et aux recherches. J'ai eu soin d'indiquer les passages qui doivent être ajournés à une seconde lecture, parce qu'ils supposent l'élève pleinement en possession des principes.

On dira peut-être, et avec une apparence de raison, que j'ai souvent fait de l'Algèbre en Arithmétique : à cela je réponds qu'à la vérité, j'ai fréquemment appliqué ce principe aussi fécond qu'il est évident, et qui

consiste en ce que si l'on fait une opération quelconque sur le premier membre d'une égalité, et qu'on la répète sur le second (*), les résultats seront égaux. Or, une proposition dont la vérité se manifeste au simple énoncé, et qui prend alors le caractère d'un *axiome*, ne pouvant être déplacée en Arithmétique, j'ai pu l'employer avec toutes ses conséquences. D'une autre part, on ne fait pas de l'Algèbre, par cela seul qu'on désigne un nombre inconnu par le symbole x, ou y ou etc., et qu'à l'effet d'en découvrir la valeur, on dégage peu-à-peu cette inconnue des nombres avec lesquels elle est engagée dans l'égalité, et on l'isole enfin dans l'un des membres dont l'autre fournit sa valeur; car pour passer de la première forme de l'équation qui est la traduction immédiate de la question, à la dernière, on n'a fait que modifier les deux membres de celle-là de la même manière, c'est-à-dire, qu'appliquer le principe énoncé.

Quelle que soit la question proposée, on

(*) Les deux membres d'une égalité sont deux phrases équivalentes, ou qui répètent la même chose en termes différens.

peut dire qu'elle n'est complètement résolue que lorsque la réponse, c'est-à-dire, la valeur de l'inconnue, qui est le sujet de la recherche, est énoncée au moyen d'opérations à faire sur des nombres connus, ou de constructions à effectuer sur des lignes données. Ainsi la tâche soit de l'Arithmétique, soit de la Géométrie, commence où finit celle des autres branches de calcul qui concourent successivement à l'œuvre de la solution. C'est encore par l'Arithmétique qu'on tire d'une formule générale une série de résultats numériques qu'on dispose en tables qui deviennent ensuite un instrument de calcul aussi sûr qu'il est expéditif, et qui multiplie en quelque sorte les années du Géomètre.

Les Mathématiques pures ou rationnelles considèrent particulièrement tout ce qui est relatif à la *grandeur* ou *quantité*, à l'*étendue* et à la *figure*; et comme ces idées de quantité, d'étendue et de figure se trouvent liées à toutes celles qui composent le système des autres divisions de la science, l'étude de ces dernières doit avoir pour préliminaire indispensable celle des Mathématiques pures qui

forment comme l'entrée de ce grand édifice qui, depuis un siècle, s'est élevé à une hauteur immense.

On ne peut disconvenir qu'il est nécessaire ou au moins désirable, que toutes les parties d'une science aussi vaste, soient fondues d'un seul jet dans un corps d'ouvrage : en effet, le lecteur qui veut se livrer à l'étude de la Mécanique, de l'Astronomie, etc., ne trouve dans les Traités relatifs que les élémens propres de la chose ; on lui suppose toutes les connaissances préliminaires indispensables à l'intelligence du texte : cependant il est souvent arrêté par des difficultés qui naissent de quelques lacunes dans son instruction, et obligé de recourir à des sources qui ne sont pas même indiquées. Ce n'est pas tout ; en passant d'un Traité à un autre, il faut se familiariser avec la notation, la manière et les formes de l'auteur : ainsi on a à lutter tout à la fois contre des habitudes nouvelles et toutes les difficultés inhérentes au sujet.

Tous ces inconvéniens sont sauvés dans un ouvrage conçu et exécuté sur le plan que j'ai adopté : chaque partie est une introduc-

tion à la suivante; ce qui suit est fondé sur ce qui précède; tout est coordonné dans un ordre systématique et régulier : des numéros de renvoi, en sauvant au lecteur des recherches pénibles, lui montrent dans ce grand ensemble la dépendance et la filiation des choses.

A la publication de *l'Arithmétique* succèdera d'abord et immédiatement celle de la *Géométrie* : le *Recueil de Théorèmes* et *de Problèmes*, les deux sections de *l'Algèbre* et la *Géométrie analytique*, qui ont aussi passé plusieurs fois au creuset de l'enseignement, sont mûrs pour l'impression. *Le calcul différentiel* est composé et a déjà subi deux révisions : il me reste à récrire le *calcul intégral* qui, comme le calcul différentiel dont il est l'inverse, a déjà eu trois éditions, et à rédiger la Mécanique et l'Astronomie dont les matériaux sont rassemblés et coordonnés. Ces Traités réunis à *l'Exposition du Système du Monde* dont l'impression se poursuit avec activité, formeront un tout dont l'exécution peut, jusqu'à un certain point, mériter l'indulgence du lecteur qui voudra bien apprécier la grandeur de l'entreprise et le mérite de l'intention.

ÉLÉMENS

D'ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS.

(1) On a désigné par les mots *grandeur* ou *quantité* tout ce qui jouit de la propriété de pouvoir être augmenté ou diminué. Si l'on conçoit la grandeur partagée en parties égales, et qu'on la compare à l'une quelconque de ces parties, on a l'idée de *pluralité* et *d'unité* ou *d'individualité ;* c'est-à-dire, l'idée du *nombre* qui se compose de la réunion de plusieurs parties égales dont chacune est nommée *unité* : en général, lorsqu'on voit un seul être ou plusieurs êtres de la même espèce ou de la même dénomination, on a l'idée de l'*unité* et du *nombre.*

(2) L'*arithmétique* a pour objet les grandeurs ou quantités, en tant qu'elles sont exprimées par des nombres.

(3) Ainsi l'unité ajoutée à elle-même, forme le premier nombre nommé *deux* ; en ajoutant une nouvelle unité à *deux*, on forme un second nombre nommé *trois*, et ainsi de suite. Comme rien ne limite la possibilité de ces additions successives d'une unité, on ne peut concevoir de bornes au nombre des nombres, puisque, quelque grand que soit le nombre qu'on vient de former, on peut en faire un plus grand, en lui ajoutant une unité.

(4) La réunion ou plutôt le mélange de plusieurs unités de différentes espèces, par exemple, de plusieurs hommes et de plusieurs francs, n'est pas un nombre, puisqu'on ne peut pas dire que ce soit un nombre d'hommes, un nombre de francs : il en serait de même de la réunion de plusieurs hommes et de plusieurs enfans ; mais si on envisage ces hommes et ces enfans comme des *êtres*, comme *des individus*, on peut dire que cette réunion est un nombre d'êtres ou d'individus. Ainsi, à ne considérer que les qualités semblables et communes à plusieurs êtres, abstraction faite de celles qui les différencient ou qui les distinguent, l'idée de nombre s'étend à la collection d'êtres dissemblables pris sous une qualité commune.

(5) Une longueur considérée isolément, ne peut être dite *grande* ou *petite* ; ces qualifications supposent évidemment une comparaison.

Ce n'est qu'autant qu'on compare plusieurs longueurs soit entr'elles, soit à une autre longueur prise arbitrairement, qu'on peut dire que l'une d'elles est la plus grande, qu'une autre est la plus petite, qu'une troisième est *moyenne* entre celles-là, c'est-à-dire, plus petite que la plus grande, et plus grande que la plus petite, en supposant seulement trois grandeurs. Mais ce premier jugement est encore incomplet, en ce qu'il convient à trois longueurs quelconques, pourvu qu'elles soient inégales.

Il faut donc préciser cette première notion acquise sur les trois lignes : à cet effet, supposons qu'une quatrième ligne prise à volonté, puisse être portée bout-à-bout d'elle-même, quatre fois sur la plus petite des trois lignes, huit fois sur la moyenne, et seize fois sur la plus grande : on saura par-là que la plus grande ligne est quatre fois la plus petite, et deux fois la moyenne, et de plus que la moyenne est deux fois la plus petite. On aura ainsi complété son jugement sur les longueurs respectives de ces lignes qu'on a ramenées à n'être que des répétitions

de la même ligne à laquelle on les rapporte; et si, par une longue habitude de cette opération, on a acquis le sentiment de la longueur de cette dernière ligne, on estimera facilement à vue les distances.

Qu'on rapporte maintenant les mêmes longueurs à une ligne double de celle qui vient de servir de terme de comparaison; on trouvera que celle-ci n'est plus que deux fois dans la plus petite, quatre fois dans la moyenne, et huit fois dans la plus grande : d'où on conclura encore que la plus grande des trois longueurs vaut quatre fois la plus petite, deux fois la moyenne, et qu'ainsi la moyenne est double de la plus petite.

Qu'enfin la ligne de comparaison devienne quadruple de ce qu'elle était primitivement; on ne pourra plus la porter qu'une fois sur la plus petite des trois longueurs, deux fois sur la moyenne et quatre fois sur la plus grande: d'où on tirera encore la même conclusion à l'égard des trois longueurs.

Donc les résultats des comparaisons, c'est-à-dire, *les rapports* entre les trois longueurs ne changent pas, lors même qu'on change de terme de comparaison.

On étendra ce que nous venons de dire, à un nombre quelconque de grandeurs comparées à une grandeur de la même espèce; et on observera, 1.° que le terme de comparaison est arbitraire quant à sa grandeur; 2.° qu'il doit être de l'espèce des grandeurs comparées; 3.° enfin, qu'il ne doit pas varier dans toute l'étendue de la *mensuration*.

Ce terme de comparaison, ce *module* arbitraire mais invariable, est ce qu'on appelle *mètre* ou *unité*; les résultats des comparaisons ou des mensurations, sont dits *nombres* : ces nombres sont des répétitions de l'unité.

On conçoit autant d'unités qu'il y a d'espèces d'êtres, en sorte que les nombres qui expriment des répétitions de l'unité, ne seront plus que des signes de rapports essentiellement *abstraits*.

CHAPITRE II.

De la Numération.

(6) Le besoin de soulager la mémoire dut faire bientôt sentir la nécessité de représenter les nombres par des *caractères* qu'on appelle encore *signes*, *figures*, ou plus généralement *chiffres*. Cette question contient deux parties : 1.° la nomenclature des nombres, c'est-à-dire, leurs noms, ou la *numération parlée* ; 2.° la notation des nombres par des chiffres, ou la *numération écrite* : nous ne nous occuperons que de celle-ci qui a pour énoncé :

Ecrire ou noter tous les nombres possibles, en n'employant qu'un nombre déterminé de chiffres.

A raison de son importance, nous en donnerons deux solutions fondées l'une et l'autre sur l'emploi de dix signes ou chiffres qui sont les suivans :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Première solution. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'écrire, au moyen des dix signes arrêtés, un nombre quelconque de pièces d'un franc : on fera avec ces pièces autant de collections de dixaines de pièces qu'il sera possible : s'il reste quelques pièces, leur nombre étant plus petit que dix, pourra être noté au moyen d'un des dix caractères : que, par exemple, il reste *sept* pièces ; on les notera par le caractère 7.

Il faut actuellement compter toutes les collections de dixaines de pièces qu'on vient de former.

A cet effet, on réunira dix de ces collections de dixaines en une seule qui sera une collection de centaines, et on procèdera de la même manière, jusqu'à ce qu'il reste moins de dix collections de dixaines de pièces, reste qu'on

pourra conséquemment noter par un des dix chiffres: supposons que ces collections de dixaines soient au nombre de *quatre* ; on les rappellera par le caractère 4.

Opérant de la même manière sur les collections de centaines de pièces, pour faire avec dix d'elles une collection de mille, on pourra écrire le nombre des collections restantes de centaines, et, en supposant qu'il y en ait *trois*, on les rappellera par le caractère 3.

Et ainsi de suite.

En réfléchissant sur cette solution, on remarque qu'on a compté la totalité des pièces d'un franc, par les restes qu'on obtient, 1.° après avoir fait toutes les collections possibles de dixaines, en sus desquelles on a trouvé 7 pièces; 2.° après avoir fait avec les collections de dixaines autant de collections de centaines qu'il est possible, en sus desquelles on a trouvé 4 collections de dixaines; 3.° après avoir fait avec les collections de centaines autant qu'il est possible de collections de mille, en sus desquelles on a trouvé 3 centaines, etc.

Mais ces chiffres 7, 4, 3, etc. n'ont rien en eux qui rappelle qu'ils comptent des unités, des dixaines, des centaines, etc. de francs.

Pour que le chiffre 4 réveille l'idée de quatre dixaines, on est convenu de l'écrire à la gauche du 7 qui compte des francs, en cette manière:

47.

Pour que le chiffre 3 rappelle des centaines, on est convenu de l'écrire à la gauche des dixaines, comme on le voit ici:

347.

S'il y avait en sus 9 unités de mille, on écrirait 9 à la gauche du 3, et on aurait

9347.

Ainsi tout nombre est une phrase dont les chiffres sont les mots, phrase que nous enseignerons bientôt à lire et à écrire.

Il peut arriver qu'après avoir fait toutes les collections possibles de mille, par exemple, avec celles de centaines, il ne reste pas de centaines : on rappellera cette circonstance, en écrivant le caractère o à la place des centaines, en cette manière :

9047.

Ce caractère o, qu'on nomme *zéro*, est un signe de *nullité*, servant d'ailleurs à occuper une place dans la phrase numérique, et à repousser les chiffres de gauche aux rangs que leur assignent les grandeurs respectives de leurs unités.

Ainsi les neuf caractères 1, 2, ... 9, outre leurs valeurs absolues, ont une autre valeur dépendante de leur position. Cette idée, l'une des plus ingénieuses découvertes de l'esprit humain, est due aux *Indiens* qui, la communiquèrent aux *Arabes* par lesquels elle se répandit parmi les peuples de l'*Europe*, vers le huitième et le neuvième siècles. Nous dirons, en passant, que les *Grecs* et les *Romains* employaient, au lieu de ces chiffres, les lettres de leur alphabet.

Seconde solution. Au-delà de la collection de neuf unités, il devient indispensable de suppléer par des conventions aux signes dont on manque. A cet effet on regarde la collection de dix unités comme une nouvelle unité, et, pour rappeler qu'elle vaut dix unités métriques, on écrit le chiffre 1 à la seconde place à gauche, en figurant la première place par ce signe o : ainsi la collection de dix unités sera notée par

10.

Maintenant, si on remplace successivement le zéro par tous les caractères primitifs 1, 2, 3, ... 9, on écrira tous les nombres intermédiaires

Dix un, *dix deux*, *dix trois*, *dix quatre*, *dix cinq*, *dix six*, *dix sept*, *dix huit*, *dix neuf*,

dénominations que la régularité rend préférable aux suivantes,

Onze, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*, *dix-sept*, *dix-huit*, *dix-neuf*,

que nous conserverons cependant, parce que l'usage les a consacrées.

On arrive à la collection *vingt* qu'on considère comme formée de deux collections *dix*, et qu'il est naturel de noter par le caractère 2 écrit, d'après la première convention, à la seconde place à gauche, en cette manière :

20.

Qu'on fasse maintenant occuper la première place à droite, successivement par les neuf caractères conventionnels, et on aura représenté les collections

Vingt, *vingt-un*, *vingt-deux*, ... *vingt-neuf*.

A cette dernière succède immédiatement la collection *trente*, décomposable en trois fois dix ou trois dixaines, qu'on notera par

30 :

et si, à la place du zéro, on écrit successivement les neuf chiffres, on aura représenté les collections

Trente, *trente-un*, *trente-deux*, ... *trente-neuf*.

En continuant ainsi à faire passer par la seconde place à gauche, les chiffres 4, 5, 6, 7, 8 et 9, et par la première place à droite figurée par le zéro, successivement tous les chiffres depuis 1 jusqu'à 9, on aura écrit toutes les collections depuis *quarante* jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

Nous ferons remarquer en passant que la nomenclature des dixaines est encore vicieuse, et qu'elle deviendrait régulière, si aux dénominations *dix*, *vingt*, on substituait celles-ci *ante*, *duante*, auxquelles succèdent *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, et si aux dénominations *soixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*, on substituait les suivantes *septante*, *octante*, *nonante*, usitées dans plusieurs lieux.

Pour écrire les quatre-vingt-dix-neuf premières collec-

tions, nous avons employé d'abord les dix signes conventionnels, et ensuite toutes les combinaisons possibles de ces dix signes deux à deux. Ainsi, lorsqu'on est parvenu à la collection immédiatement consécutive à *quatre-vingt-dix-neuf*, collection qu'on nomme *cent*, il devient indispensable de faire une nouvelle convention. Pour suivre l'analogie, nous considérerons ces cent unités comme une seule unité qu'il conviendra de noter par ce signe 1; et pour rappeler que ce signe compte cent fois l'*unité métrique*, on écrira 1 à la troisième place à gauche, en figurant les deux premières places à droite par des zéros, en cette manière :

100.

Ayant écrit, d'après cette convention, les collections *deux cents*, *trois cents*, . . . *neuf cents*, en cette manière :

200, 300, ... 900,

on remplacera les deux zéros par les quatre-vingt-dix-neuf premières phrases numériques, en sorte qu'on aura écrit tous les nombres intermédiaires, et, en totalité, la série des nombres depuis *cent* jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

Depuis l'unité jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf on a employé les neuf caractères, toutes leurs combinaisons deux à deux et trois à trois, d'où résulte la nécessité de faire une nouvelle convention pour représenter la collection de *mille* unités, qu'on notera comme on le voit ici :

1000.

En allant d'abord de mille en mille, on aura

2000, 3000, ... 9000,

et on remplira les intervalles d'un mille à l'autre par les nombres de 1 à 999, qui ne prendront, au plus, que les trois premières places à droite;

Et ainsi de suite.

Ainsi, à l'aide de deux conventions, dont l'une est relative

aux nombres des signes, et l'autre à la position ou au rang de chacun d'eux dans la phrase numérique, rang d'après lequel un chiffre compte, ou des dixaines, ou des centaines, etc., on peut écrire tous les nombres possibles.

De la convention de dix signes, il résulte nécessairement que la *progression* des unités est *décuple*, en allant de droite vers gauche, c'est-à-dire, que l'unité d'un chiffre en vaut dix de celle du chiffre immédiatement à droite.

Réciproquement, la progression des unités étant décuple, nécessairement les signes sont au nombre de dix y compris zéro : en effet, de ce que l'unité du second chiffre en vaut dix du premier, il faut en conclure qu'on n'a pu représenter la collection *dix* par un seul chiffre, et de plus que cette collection est la plus petite de celles qu'on ne peut noter par un chiffre : donc, etc.

(7) Je suppose maintenant qu'on n'ait à sa disposition que les trois caractères 0, 1 et 2, au moyen desquels on doive écrire tous les nombres : arrivé à la collection *trois* qu'on ne peut représenter faute de signe, on en fera une unité; et pour dire qu'elle vaut trois unités de mesure, on écrira le caractère 1 avec un zéro à sa droite, pour figurer la première place, en sorte que le nombre *trois* sera représenté par

10.

Si l'on remplace le zéro par les chiffres 1 et 2, les collections *trois et un*, *trois et deux*, ou *quatre et cinq* seront notées par

11, 12.

De six unités on fera deux collections *trois* qu'on notera ainsi :

20 :

et les collections *sept* et *huit* seront représentées par

21, 22 :

la collection *neuf* sera une nouvelle unité figurée par

100.

Si dans cette phrase on fait occuper les deux premières places de droite, successivement par les huit premiers nombres, on aura

. 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122,

qui expriment *dix*, *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*, *dix-sept*. Le nombre *dix-huit*, c'est-à-dire, deux fois la collection *neuf*, sera

200,

et les collections *dix-neuf*, *vingt*, *vingt-un*, *vingt-deux*, *vingt-trois*, *vingt-quatre*, *vingt-cinq*, *vingt-six*, seront traduites par

201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222.

De *vingt-sept* unités on en fera une seule qu'on représentera par 1 suivi de trois zéros, en cette manière:

1000.

Si, en place du premier zéro, des deux premiers et des trois zéros, on fait passer tous les nombres depuis l'*unité* jusqu'à *vingt-six*, nombres qu'on sait écrire, et qui occupent une, deux et trois places, on s'élèvera jusqu'à la collection *cinquante-trois*. On désignera *cinquante-quatre*, ou deux fois vingt-sept, par

2000,

et au moyen des vingt-six premiers nombres, on s'élèvera jusqu'à *quatre-vingt* inclusivement: arrivé à *quatre-vingt-un*, on fera une nouvelle convention, et ainsi de suite.

Lors donc qu'on emploie trois caractères, 0, 1, 2, les unités suivent une progression triple, en allant de droite à gauche, c'est-à-dire que, dans la phrase numérique qui résulte de cette convention, l'unité d'un chiffre en vaut trois de celle du chiffre immédiatement à sa droite.

Réciproquement, de l'hypothèse d'une progression triple, on conclut trois caractères ou signes: en effet, puisqu'on est obligé de fondre trois unités en une seule, c'est qu'on manque d'un caractère pour noter la collection trois unités; on n'a donc que trois signes y compris le zéro.

(8) On peut donc fonder des systèmes d'arithmétique sur les conventions de deux, ou trois, ou quatre, etc. caractères, et on observera que, moins on suppose de signes, plus la phrase numérique pour le même nombre, devient longue; et que réciproquement, plus on suppose de ces signes, plus la phrase est laconique.

(9) L'arithmétique, suivant qu'elle est fondée sur l'emploi de deux, de trois, de quatre. . . . . . de dix, onze, douze, etc. caractères, est dite *binaire*, *ternaire*, *quaternaire* . . . . *decimale*, *undécimale*, *duodécimale*, etc.; et, en même temps, la progression des unités, en allant de droite à gauche, est *double*, *triple*, *quadruple*, ... *décuple*, *ondécuple*, *duodécuple*, etc.

(10) Dans tous ces systèmes d'arithmétique en nombre indéfini, l'unité du premier chiffre à droite, est dite du *premier ordre;* c'est *l'unité métrique* : celles des second, troisième, quatrième, etc. chiffres, sont dites du *second*, *du troisième*, *du quatrième*, *etc. ordre*.

(11) Soit le nombre

357 894

écrit dans le système décimal : l'unité du 4 est *l'unité principale* ou *métrique*; l'unité du 9 est dite *dixaine*, celle du 8 *centaine*, celle du 7 *mille*, celle du 5 *dixaine de mille*, celle du 3 *centaine de mille*, etc. Ces unités principales ou métriques, de dixaine, centaine, mille, dixaine de mille, etc., sont celles des *premier*, *second*, *troisième*, *quatrième*, etc. ordres, d'après les dénominations convenues plus haut, et qui s'étendent à tous les systèmes d'arithmétique.

Préceptes pour lire et pour écrire les nombres.

(12) Il s'agit maintenant d'apprendre 1.° *à lire un nombre écrit;* 2.° *à écrire un nombre dicté.*

Première question. Soit le nombre

1 243 798 567 :

on remarquera que les dénominations des unités des dif-

férens ordres, sont régulières et périodiques de trois en trois intervalles (*), à compter du premier chiffre à droite inclusivement, et dans le sens de droite à gauche : en effet, si dans ce sens, et à partir du premier chiffre de droite, on divise le nombre en tranches de trois chiffres, les unités des premiers chiffres de droite, dans chaque tranche, seront *l'unité principale*, *l'unité de mille*, *l'unité de million*, *l'unité de billion*, etc. : celles des second chiffres de chaque tranche, seront *la dixaine de l'unité principale*, *la dixaine de mille*, *la dixaine de million*, *de billion*, etc. ; celles des troisième chiffres de chaque tranche, seront *la centaine de l'unité principale*, *la centaine de mille*, *de million*, *de billion*, etc.

D'où il suit que chaque tranche complète, c'est-à-dire, composée de trois chiffres, se forme des unités de cette tranche, des dixaines et des centaines de cette unité qui donne son nom à la tranche : ainsi, dans le sens de droite à gauche, on passe de la tranche des unités à celle des mille, de celle-ci à la tranche des millions, de celle-ci à la tranche des billions, à la tranche des trillions, etc. Cela posé, dès qu'on sait lire un nombre de trois chiffres, ce qui exige seulement qu'on connaisse les noms des nombres depuis un jusqu'à cent, lesquels se réduisent à vingt-six, distraction faite des noms composés, on est en état de lire un nombre quelque grand qu'il soit, puisque la question se réduit à lire dans un ordre absolument arbitraire, chacune des tranches, comme si elle était seule, et à terminer la phrase numérique par la dénomination de l'unité de la tranche.

Ordinairement, on lit les tranches dans le sens de gauche à droite ; si la dernière à gauche est incom-

(*) On entend par intervalle l'espace entre deux chiffres consécutifs : ainsi un intervalle suppose deux chiffres, deux intervalles supposent trois chiffres, trois intervalles en supposent quatre, et ainsi de suite.

plète, on l'énonce comme un nombre d'un ou deux chiffres, ayant toujours soin d'exprimer la dénomination de son unité, c'est-à-dire le nom de la tranche. Les tranches suivantes sont toujours complètes, c'est-à-dire, composées de trois chiffres parmi lesquels il peut y avoir des zéros.

Ainsi, par rapport au nombre ci-dessus et que nous écrirons ici avec le nombre des tranches,

1	243	798	567
billion	millions	mille	unités

on conçoit que, quel que soit l'ordre qu'on suive en lisant les tranches, on ne comptera ni plus ni moins d'unités. On pourrait donc dire

243 millions, 1 billion, 798 mille, 567 unités,
ou 798 mille, 243 millions, 567 unités, 1 billion,
ou, etc.

Mais on préfère le sens de gauche à droite, parce que, dans tout résultat, on est curieux de connaître d'abord le nombre des plus hautes unités.

Seconde question. Celui qui dicte un nombre ne s'exprime pas autrement que s'il lisait un nombre écrit : il dicte donc les tranches de la gauche vers la droite, et chacune d'elles comme si elle était seule, en énonçant à la suite de chaque phrase numérique le nom de la tranche.

Lorsqu'on a énoncé la première tranche de gauche, on connaît le nombre total des tranches, et conséquemment celui des chiffres : les tranches omises dans la dictée doivent être figurées par trois zéros, et les tranches incomplètes doivent être complétées par des zéros.

Il est indispensable de beaucoup exercer les élèves sur ces deux questions.

Génération des décimales.

(13) De ce que l'unité d'un ordre, dans l'arithmétique décimale, en vaut dix de celle de l'ordre immédiatement

inférieur, il suit réciproquement que celle-ci n'est que la dixième partie ou un *dixième* de l'autre; en sorte que la progression des unités étant *décuple* dans le sens de droite à gauche (6), est conséquemment *sous-décuple* dans le sens de gauche à droite: par où il faut entendre que chaque unité est le dixième de sa voisine à gauche. Ainsi, en supposant, pour un moment, que l'unité de mille soit celle de l'ordre le plus élevé, la centaine en est un *dixième*, la dixaine est le dixième du dixième, c'est-à-dire, un *centième*, et l'unité est le dixième du centième, c'est-à-dire, un *millième*. D'où il résulte qu'en coupant l'unité de mille en dix, en cent, en mille parties égales, on engendre des centaines, des dixaines et des unités.

On pourra donc concevoir l'unité du premier ordre, ou *l'unité métrique*, coupée en dix parties égales dont chacune sera un *dixième* de cette unité; le dixième coupé en dix parties égales dont chacune sera le dixième du dixième, ou *le centième* de l'unité; chaque centième coupé en dix parties égales dont chacune sera le dixième du centième, ou *le millième* de l'unité, et ainsi de suite.

Pour rendre plus sensible la génération de ces dixièmes, centièmes, millièmes, etc., on pourra prendre une ligne d'une longueur arbitraire, comme représentation de l'unité, la partager d'abord en dix parties égales dont chacune montrera un *dixième;* partager un de ces dixièmes en dix parties égales dont chacune sera dix fois dans le dixième, et cent fois dans l'unité entière, et représentera un *centième*; diviser un centième en dix parties égales dont chacune contenue dix fois dans le
centième, et conséquemment mille fois dans l'unité, 4.
sera un *millième*, et ainsi de suite.

Qu'on ait maintenant à écrire *trois dixièmes*: on aura recours au caractère 3 qui a pour fonction de compter trois unités, quels qu'en soit la grandeur et l'ordre: mais pour rappeler que l'unité du 3 est un dixième de l'unité

métrique, on écrira 3 immédiatement à la droite du chiffre des unités, ou du zéro qui en tient la place, en interposant une virgule, ainsi qu'on le voit ici :

0,3.

Qu'en sus de trois dixièmes, on ait à écrire 4 centièmes : on emploiera le caractère 4 qu'on écrira immédiatement à droite du 3 en cette manière :

0,34.

Qu'on ait encor 7 millièmes : on écrira 7 à droite du 4 comme il suit :

0,347 :

et ainsi de suite.

Ces sous-divisions de l'unité métrique ou principale, divisées en dix, cent, mille, etc. parties égales, sont dites *unités décimales*, dénomination impropre.

Le nombre qui n'est formé que de l'unité principale et de ses décuples, est dit *nombre entier* : si, de plus, il renferme des décimales, il est dit *nombre décimal*.

(14) Dans toute l'étendue d'un nombre décimal, la progression des unités est *décuple* de droite vers gauche, et conséquemment *sous-décuple* de gauche vers droite.

(15) Les unités décimales sont divisées en *ordres* comme les unités entières; le *dixième* est du premier ordre, le *centième* est du second ordre, le *millième* du troisième ordre, etc.

(16) Tout nombre exprime combien de fois la plus petite unité est répétée : lorsque le nombre est décimal, cette plus petite unité est celle du dernier chiffre à droite; cependant comme sa dénomination et sa grandeur sont subordonnées à la dénomination et à la grandeur de l'unité métrique, on doit toujours considérer cette dernière comme l'unité fondamentale : en effet, celle-ci est fixe, tandis que l'autre varie suivant le rang qu'elle occupe.

(17) Dans les systèmes d'arithmétique que nous avons nommés (9) binaire, ternaire. . . . . . duodécimal, les

unités analogues aux décimales, seraient *sous-doubles*, *sous-triples*..... *sous-duodécimales* les unes des autres : ainsi, par exemple, dans ce dernier système, on diviserait l'unité métrique en douze parties égales dont chacune serait dite *douzième*; chaque douzième en douze parties égales dont chacune serait dite *cent quarante-quatrième*; l'unité suivante serait un *dix-sept cent vingt-huitième*, etc.

Préceptes pour lire et pour écrire les nombres décimaux.

(18) *Première question.* Pour nous expliquer sur un exemple, soit le nombre décimal 2,347 : on pourrait d'abord lire 2 unités, 3 dixièmes, 4 centièmes, 7 millièmes; ce qui revient, en quelque sorte, à épeler le nombre : mais en partant de la notion du nombre, donnée (16), on conclut que 2,347 compte autant d'unités de l'ordre du 7, c'est-à-dire, autant de millièmes que 2347 compte d'unités métriques, puisque toute la différence entre ces deux nombres, consiste dans la grandeur de l'unité répétée : le nombre proposé compte donc *deux mille*, *trois cent*, *quarante-sept*, *millièmes*. Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver la dénomination de la plus petite unité décimale. Soit, à cet effet, le nombre

432 1,234

dans lequel les chiffres équidistans de celui des unités, sont les mêmes : les unités du 2 sont des dixaines à gauche et des dixièmes à droite; les unités du 3 sont des centaines à gauche et des centièmes à droite; celles du 4 sont des mille à gauche et des millièmes à droite; et en général, les dénominations des unités de deux chiffres équidistans de celui des unités, ne diffèrent que par la terminaison ou la finale. Ainsi le septième chiffre à gauche, par exemple, comptant des millions, le septième chiffre à droite comptera des millioniêmes, Il est bien entendu que

le rang tant du chiffre à gauche que du chiffre à droite, se compte du chiffre des unités inclusivement.

Il ne sera pas inutile de montrer comment toutes les unités d'un nombre décimal, se traduisent dans la plus petite de ces unités. Prenons le nombre

73,426 :

chaque unité du 2 valant 10 des unités du 6, compte 10 millièmes; donc les 2 unités valent 20 millièmes, lesquels ajoutés à 6 millièmes, font 26 millièmes: chaque unité du 4 vaut 10 unités du 2, et conséquemment 10 fois 10 millièmes ou 100 millièmes; donc les 4 unités valent 400 millièmes, lesquels ajoutés à 26 millièmes font 426 millièmes: chaque unité du 3 en vaut 10 de celle du 4, et conséquemment 10 fois 100 millièmes ou 1000 millièmes; les trois font donc 3000 millièmes qui étant ajoutés à 426 millièmes, font 3426 millièmes : enfin, chaque unité du 7 en vaut 10 du 3, c'est-à-dire 10000 millièmes; 7 vaut 70000 millièmes qui joints à 3426 millièmes, font 73426 millièmes.

On est donc conduit à cette règle: *on lira le nombre décimal comme s'il était entier, c'est-à-dire, abstraction faite de la virgule, et ensuite on déclinera l'espèce ou le nom de la plus petite unité décimale.*

Seconde Question. Lorsqu'un nombre décimal est dicté, il faut d'abord ne faire attention qu'à la partie de la phrase qui énonce le nombre comme s'il était entier, et l'écrire dans cette hypothèse (12). Cela fait, si, par exemple, on a décliné des dix-millièmes, il faudra placer la virgule de manière que le premier chiffre à droite occupe la cinquième place à partir du chiffre des unités inclusivement, de sorte qu'en partant de ce premier chiffre de droite, et remontant vers la gauche, on trouvera facilement la place des unités, et conséquemment celle de la virgule.

Dans la première question, on conclut la dénomina-

tion de la plus petite unité, de la place qu'occupe la virgule; dans la seconde question, au contraire, on déduit la place de la virgule de la dénomination de la plus petite unité.

Observations générales sur les nombres entiers et décimaux.

(19) Lorsqu'à la droite d'un nombre entier tel, par exemple, que 2328, on écrit un zéro, le nombre devient décuple, puisque le nouveau nombre 23280 compte autant de dixaines que le premier compte d'unités.

Généralement, lorsqu'à la droite d'un nombre entier, on écrit deux, trois, etc. zéros, le nombre qui en résulte, comptant autant de centaines, autant de mille, etc., que le premier compte d'unités, vaut cent fois, mille fois, etc. le nombre proposé.

Des zéros écrits à la gauche d'un nombre entier, ne changent pas la grandeur de ce nombre. C'est ce dont on s'assure sur les deux nombres

234 00234

qui comptent 4 unités, 3 dixaines, 2 centaines, et qui ne donnent ni mille, ni dixaines de mille, etc.

Des zéros écrits à la suite d'un nombre décimal n'en changent pas la grandeur. C'est ce qu'on reconnaît sur les deux nombres

0,12 0,1200

qui comptent 1 dixième, 2 centièmes, et qui n'énoncent pas de millièmes, de dix-millièmes, etc.

Soit le nombre décimal 2,3456 : si on fait descendre la virgule d'une, de deux, de trois, etc. places vers la droite, on aura ceux-ci:

23,456
234,56
2345,6
23456

qui comptent autant de millièmes, de centièmes, de dixièmes d'unités, que le nombre proposé compte de dix-millièmes; donc ces nombres valent dix, cent, mille, dix mille fois le premier, et réciproquement.

Donc, *en faisant descendre la virgule d'une, de deux, de trois places vers la droite, on répète le nombre décimal dix fois, cent fois, mille fois, etc.*

Réciproquement, *en faisant remonter, dans un nombre décimal, la virgule d'une, de deux, de trois, etc. places vers la gauche, on prend le dixième, le centième, le millième, de nombre.*

Tout nombre entier peut être écrit sous forme décimale : en effet le nombre 24 équivaut à

24,0
24,00
24,000, etc.

(20) Soit un résultat décimal tel que

3fr., 148

l'unité étant le franc : comme la plus petite pièce dans le *système monétaire français*, est le centime, ou le centième du franc, on peut se croire en droit de rejeter du nombre proposé les 8 millièmes, et conséquemment de réduire ce nombre à

3fr., 14;

mais si on observe qu'on commet ainsi une erreur, en moins, de 8 millièmes, tandis qu'en écrivant

3fr., 15

on en commet une en plus, qui n'est que de deux millièmes, puisque 8 millièmes plus 2 millièmes font 1 centième, on se décidera en faveur du résultat 3fr., 15. Si le chiffre des millièmes, était 5, l'erreur faite, en moins, en écrivant 3fr., 14

serait la même que l'erreur faite, en plus, en écrivant

3fr., 15

puisque, dans les deux cas, l'erreur est de 5 millièmes.

Enfin, lorsque le chiffre négligé est moindre que 5, on ne doit compter que 3fr, 14, puisque l'erreur commise, en moins, est la plus petite. Dans la suite de ce traité, nous aurons occasion de nous étendre sur les considérations qui déterminent le plus ou moins d'approximation des résultats qu'on ne peut obtenir en rigueur.

Dans le plus grand nombre des traités d'arithmétique, on renvoie les fractions décimales à la suite des fractions ordinaires dont on les regarde en quelque sorte comme des cas particuliers. Cette marche nous paraît d'autant moins fondée en raison, que les fractions vulgaires peuvent être bannies de l'arithmétique, ou qu'au moins elles peuvent toujours être avantageusement remplacées par les décimales dans lesquelles on traduit aujourd'hui tous les résultats numériques, soit *rationels*, soit *incommensurables*. Dans son immortel ouvrage ayant pour titre : *Arithmetica universalis*, *sive de compositione et resolutione arithmetica*, *Newton* donne, dès les premières pages, la génération et la notation des décimales, et il mène de front les opérations sur les nombres entiers et décimaux. Cet exemple justifie pleinement la marche que nous avons adoptée, et qui est suivie dans les bonnes écoles. Nous observerons qu'à la virgule qui sépare les décimales, on substitue assez souvent le point qui, dans l'impression, est préférable.



CHAPITRE III.

Addition et Soustraction des nombres entiers et décimaux.

1.° Addition des nombres entiers et décimaux.

(21) *Étant donnés plusieurs nombres entiers, trouver un nombre qui compte la totalité de leurs unités, de leurs dixaines, centaines, mille, etc.*

La solution de cette question n'est qu'une généralisation de celle de la numération donnée (6).

Supposons qu'on ait à ajouter les trois nombres, 234; 328; 972 : avec les 4, plus 8, plus 2 unités, on fera une collection de dix unités ou une dixaine, et on aura en sus 4 unités: on ajoutera cette dixaine aux 3, plus 2, plus 7 dixaines, et avec ces 13 dixaines on fera 1 centaine, et en sus on aura 3 dixaines; cette centaine ajoutée aux 2, plus 3, plus 9 centaines, donnera 15 centaines avec lesquelles on fera 1 mille et il restera 5 centaines.

On a donc trouvé 4 unités, 3 dixaines, 5 centaines et 1 mille.

Puisqu'on doit ajouter les unités, puis la *retenue* en dixaines aux dixaines, puis la retenue en centaines aux centaines, et ainsi de suite, si les nombres donnés ont plus de trois chiffres, il est naturel et commode de disposer les nombres sur lesquels on doit opérer, de manière que les unités des différens ordres forment autant de colonnes verticales; puis ayant tiré un trait horizontal au-dessous des nombres à ajouter, on écrira les surplus 4 unités, 3 dixaines, 5 centaines, et 1 mille au-dessous des colonnes verticales d'unités de même dénomination, comme on le

voit dans le tableau suivant qui offre le *dispositif* de l'opération :

234
328
972
1534.

Cette opération se nomme *addition* : le résultat de l'addition s'appelle *somme : ajouter* ou *sommer* sont deux expressions synonymes.

Il est essentiel de remarquer que, dans l'addition, on ne fait qu'ajouter un chiffre à un chiffre, ou à une somme qui peut être composée de plusieurs chiffres ; donc lorsqu'on est en état d'ajouter deux chiffres, ou un nombre et un chiffre, on peut faire toute addition.

Il peut arriver que la somme des unités de l'une des colonnes verticales, fasse un nombre rond d'unités de la colonne immédiatement à gauche ; que, par exemple, la somme des dixaines soit un nombre exacte de centaines ; alors on pose o au-dessous de la colonne des dixaines. Ce cas se rencontre dans l'exemple suivant :

2	334	567
1	893	784
6	321	953
10	550	304.

Le chiffre o se trouve trois fois dans cette somme, pour dire, 1.° que le nombre total des dixaines fait un nombre rond de centaines ; 2.° que la totalité des mille fait un nombre rond de dixaines de mille ; 3.° que la somme des millions fait un nombre rond de dixaines de millions.

Lorsqu'on a à ajouter beaucoup de nombres composés chacun d'un assez grand nombre de chiffres, il est bon de les partager en tranches de trois ou de cinq chiffres de droite à gauche, pour ménager des blancs qui reposent l'œil.

Supposons maintenant qu'on ait à procéder par voie

d'addition sur des nombres décimaux qui aient tous même nombre de décimales : on pourra considérer ces nombres comme s'ils étaient entiers, et, après avoir fait l'addition dans cette hypothèse, on fera compter à la somme des unités décimales de la dénomination commune, condition qui déterminera la place de la virgule (18).

Soient donc à ajouter les nombres

Cinq cent vingt-trois mille, huit cent quatre-vingt-quatorze millièmes.

Deux cent trente-quatre mille, cinq cent soixante-sept millièmes.

Deux cent soixante-sept mille, deux cent quatre-vingt-quatorze millièmes.

On les disposera de manière que les unités d'un même ordre soient placées verticalement, comme on le voit ici,

523,894
234,567
267,294

et on se rappellera que dix unités d'un ordre en valent une de l'ordre immédiatement supérieur.

Si les nombres décimaux n'ont pas tous même nombre de décimales, comme ceux-ci :

Deux mille, trois cent quarante-sept millièmes,
Quarante-deux dixièmes,
Trois cent vingt-cinq centièmes,
Vingt-quatre unités :

on les ramènera au cas précédent, en écrivant des zéros à droite (19) ; et on aura à opérer, par voie d'addition, sur ces nombres équivalens

2,347
4,200
3,250
24,000.

(22) Il serait préférable de pratiquer l'addition dans le sens de gauche à droite, pour connaître d'abord les

plus hautes unités de la somme, si ce procédé n'était sujet à un inconvénient que nous allons faire connaître sur l'exemple simple suivant :

```
 382
 756
 498
────
1426
 21
────
1426.
```

La somme des centaines est 14 centaines qu'on écrit : la somme des dixaines, est 22 qui donne 2 dixaines, et la retenue deux centaines qu'on voit au-dessous des 4 centaines : la somme des unités est 16 qui donne 6 unités plus 1 dixaine qu'on voit écrite au-dessous des 2 dixaines : maintenant si l'on ajoute les centaines 4 et 2, les dixaines 2 et 1, on obtiendra la somme cherchée.

(23) Lorsqu'il ne s'agit que d'indiquer l'addition de plusieurs nombres, on écrit ces nombres de suite, en interposant entr'eux un signe exclusivement consacré au rappel de l'addition, signe qui est + et qu'on prononce *plus*. D'après cette convention, $2+5$ est l'abréviation de 2 plus 5 : pareillement $2+3+4+7$ signifie qu'à 2 on doit ajouter 3, qu'à la somme on doit ajouter 4, et qu'à cette somme on doit ajouter 7.

2.° Soustraction des nombres entiers et décimaux.

(24) *Etant donnée la somme de deux nombres, et l'un de ces nombres, trouver l'autre nombre.*

Cette question est l'inverse de celle qui donne lieu à l'addition, dans le cas particulier où on n'aurait que deux nombres à ajouter.

Supposons donc qu'ayant fait l'addition suivante :

```
23 152
16 834
──────
39 986
```

on donne la somme 39986, et l'un des deux nombres ajoutés; par exemple, le nombre 16834, et qu'il s'agisse de découvrir, d'après ces données, le nombre 23152. La question se réduit évidemment à trouver les unités, dixaines, centaines etc. du nombre inconnu, qu'il a fallu ajouter aux unités des mêmes ordres de 16834 pour avoir celles de la somme, ce qui revient en d'autres termes, à chercher l'excès des unités, puis des dixaines, puis des centaines, etc. de la somme, sur les unités, dixaines, centaines, etc., de l'autre nombre donné. Pour pratiquer plus commodément l'opération, on placera la somme donnée, et au-dessous l'autre nombre connu, de manière que les unités des mêmes ordres se correspondent verticalement, puis après avoir tiré un trait horizontal, comme on le voit dans le dispositif ci-dessous,

$$\begin{array}{r} 39\ 986 \\ 16\ 834 \\ \hline 23\ 152. \end{array}$$

On dira l'excès de 6 sur 4 est 2; l'excès de 8 sur 3 est 5; celui de 9 sur 8 est 1; de 9 sur 6 est 3, et enfin de 3 sur 1 est 2: mais comme l'excès d'un chiffre sur un plus petit n'est autre chose que le reste qu'on obtient, en ôtant le plus petit du plus grand, on pourra dire: 4 ôté de 6, il reste 1; puis 3 ôté de 8, il reste 4, et ainsi de suite. Il est clair d'ailleurs que, dans ces soustractions partielles, on peut toujours considérer les deux chiffres sur lesquels on opère, comme ne comptant que des unités du premier ordre, parce qu'en effet 8 centaines ôtées de 9 centaines, par exemple, laissent autant de centaines que 8 unités ôtées de 9 laissent d'unités.

Il peut arriver que quelques-uns des chiffres du nombre à retrancher, comptent plus d'unités que leurs correspondans dans le nombre duquel on retranche, comme on le voit dans l'exemple suivant:

$$\begin{array}{lr} \text{de......} & 37\ 526 \\ \text{ôter....} & 16\ 394 \\ \hline \end{array}$$

Cependant la soustraction est possible, puisque le nombre à retrancher est le plus petit : on dira 4 de 6, reste 2 ; de 2 dixaines, on ne peut ôter 9 dixaines ; mais on observera que la somme de deux chiffres ne pouvant être moindre que l'un de ces chiffres, le chiffre 2 ne peut être qu'une partie de la somme due à l'addition de 9 et du chiffre inconnu ; d'une autre part, la somme des deux plus grands chiffres 9 plus 9, ne donnant que la retenue 1', celle de 9 dixaines plus les dixaines inconnues, n'a pu fournir que la retenue 1 centaine qui est dans 5 centaines (*) : reprenant cette centaine qui vaut dix dixaines et les ajoutant à deux dixaines, on aura la somme 12 dixaines dont l'excès sur 9 est 3 dixaines. Le chiffre 5 ne doit plus être compté que pour 4, à cause de la distraction de la centaine ; si de 4 centaines on ôte 3 centaines, il reste 1 centaine : 6 mille ôtés de 7 mille, il reste 1 mille ; et enfin 1 dixaine de mille ôtée de 3, reste 2 dixaines de mille. On voit ici l'opération effectuée :

de.	37	526
ôtez.	16	394
reste. . . .	21	132.

Soit, en troisième lieu, à effectuer la soustraction suivante :

	1	9	10	
de. . .	2	0	0	404
ôtez. . .	1	4	5	232.

(*) Lorsque, dans l'addition de deux nombres, on fait les additions partielles de deux chiffres, il peut arriver que la somme n'ait qu'un seul chiffre, ou qu'elle en ait deux : dans le premier cas, le chiffre de la somme est évidemment plus grand que chacun des chiffres qu'on ajoute ; dans le second, comme la retenue ou l'excédant de la somme sur 10, s'ajoute à la colonne à gauche, le chiffre qu'on pose est moindre que la somme des deux chiffres ajoutés. Les deux plus grands chiffres dont la somme n'est que d'un chiffre, sont 5 et 4 : au-delà, la somme a toujours deux chiffres.

On dira 2 de 4 reste 2 : puis 3 de 0 ne se peut, mais on s'adressera au chiffre 4 centaines sur lequel on reprendra ou on *empruntera* 1 centaine qui vaut 10 dixaines, lesquelles ajoutées à 0 dixaines font toujours 10 dixaines, d'où soustrayant 3 dixaines, reste 7 dixaines. Les 4 centaines ne doivent plus être comptées que pour 3, d'où ôtant 2, il reste 1 centaine. De 0 mille, il faut soustraire 5 mille; comme on ne peut faire d'emprunt sur le chiffre des dixaines de mille, on s'adressera à celui des centaines de mille, sur lequel on en prendra 1 qui vaut 10 dixaines de mille qu'on décomposera en 9 dixaines de mille qu'on voit au-dessus du 0 correspondant, et en 1 dixaine de mille ou 10 mille qu'on voit au-dessus de 0 mille. Le reste de la soustraction est donc facile : nous présentons l'opération effectuée.

De ...	200	404
ôtez ...	145	232
reste ...	55	172.

Soit encore l'exemple suivant qui donnera lieu à quelques remarques utiles :

de....	803	628
ôtez...	242	436 :

1.° 6 de 8 reste 2; 2.° à 2 on ajoutera 10, ce qui fera 12, d'où retranchant 3, reste 9; 3.° de 6 il faut d'abord retrancher l'unité empruntée, puis du reste 5 ôter encore 4, ce qui fait en totalité 1 + 4 ou 5 à ôter de 6, le reste est 1; 4.° ôtant 2 de 3, reste 1; 5.° ôtant 4 de 10, reste 6; 6.° de 8 il faut ôter l'unité empruntée et du reste 7 ôter 2, ce qui revient évidemment à retrancher 1+2 ou 3 de 8, et il reste 5.

Ainsi, lorsque le chiffre supérieur est moindre que l'inférieur, on augmente le premier de dix unités, et par-là la soustraction partielle devient possible : en passant à la soustraction suivante, on tient compte de l'unité em-

pruntée, en l'ajoutant au chiffre inférieur, et laissant le supérieur tel qu'il est. De cette manière, on porte dans la soustraction les habitudes de l'addition, où, lorsqu'on prononce 10, 11.... 19, on retient une unité qu'ici on ajoute au chiffre à soustraire.

On peut encore s'assurer, comme il suit, que l'emprunt d'une seule unité rend toujours possible toute soustraction partielle : pour se placer dans le cas le plus défavorable, supposons que le chiffre pour lequel on emprunte soit zéro, et que le chiffre à retrancher soit 9 : comme la seule unité empruntée en vaut 10 de l'ordre du chiffre pour lequel on emprunte, la soustraction devient possible, ce qui arrive, *à fortiori*, dans tout autre cas.

Qu'on ait

de 343,697
à ôter. . . 137,785

on opèrera comme si les deux nombres étaient entiers, et le reste comptera des décimales de la dénomination commune, c'est-à-dire, des millièmes : d'ailleurs ce que nous avons dit sur les emprunts et les abréviations, est applicable ici, sans restriction et modification.

Preuves de l'Addition et de la Soustraction.

(25) Lorsqu'on a effectué une opération, il faut la vérifier, ou s'assurer si elle est exacte ou non : cette vérification s'appelle *preuve*. Commençons par l'addition, et supposons qu'on ait fait celle des nombres 38 462 ; 25 345 ; 98 949, qui a donné 162 756 : il est clair que si on *somme* dans un ordre quelconque, les unités des différens ordres des trois nombres donnés, et qu'on retranche les sommes partielles des unités correspondantes de la somme trouvée, on devra obtenir o pour résultat final, si cependant l'addition a été bien faite. Ainsi reprenant, pour plus de facilité, l'addition par la gauche et procédant de gauche à droite, on dira :

3+2+9, ou 14 dixaines de mille ôtées de 16 dixaines de mille, il reste 2 dixaines de mille, ou 20 mille, qui, ajoutés à 2 mille, font 22 mille; puis 8+5+8 font 21 mille, qui, ôtés de 22 mille, laissent le reste 1 mille ou 10 centaines, qui, jointes aux centaines de la somme, font 27 centaines : puis, 4+3+9 ou 16 centaines ôtées de 17 centaines, donnent 1 centaine ou 10 dixaines, lesquelles ajoutées à 5 dixaines en donnent 15 : ensuite 6+4+4 font 14 dixaines, qui, retranchées de 15 dixaines, donnent le reste 1 dixaine ou 10 unités, qui, ajoutées à 6 unités, en donnent 16 : enfin 2+5+9 font 16 unités, qui, ôtées de 16 unités, donnent le reste zéro. D'où on conclut que l'opération est bonne. Suit le dispositif de cette preuve :

58	462
25	345
98	949
162	756
21	110.

La ligne qui est au-dessous de la somme est celle des restes : on observera encore que ces mêmes restes 1, 1, 1, 2 sont les retenues en dixaines, centaines, mille et dixaines de mille, dues aux additions des unités, dixaines, centaines et mille dans l'addition primitive.

(26) Passons à la preuve de la soustraction. Puisque cette opération décompose le nombre donné comme somme en deux autres, dont l'un est donné tandis que l'autre résulte de l'opération, nécessairement, si on combine par addition ces deux derniers nombres, on retrouvera le premier. Ainsi, lorsque la soustraction a été bien faite, l'addition du nombre soustrait et du reste, recompose le nombre dont on soustrait.

Ces deux preuves conviennent aux nombres décimaux.



CHAPITRE IV.

Multiplication et Division des nombres entiers et décimaux.

Multiplication des nombres entiers.

(27) *Un nombre étant donné, le répéter un certain nombre de fois.*

Cette question se résout naturellement par l'addition; car soit le nombre 1348, par exemple, à repéter 234 fois, il faut écrire 234 fois le nombre 1348 dans une colonne verticale, suivant le dispositif de l'addition, et faire la somme. Comme ce procédé est généralement parlant très-laborieux, et peut même devenir impraticable dans un grand nombre de cas, il convient de chercher à l'abréger.

D'abord on pourra écrire 4 fois dans une colonne verticale le nombre 1348, et on aura pour somme

1.° . . . . 5392.

Ensuite on écrira le même nombre 30 fois dans une autre colonne verticale; seconde addition à faire, mais qu'on abrègera, en observant qu'il revient au même d'écrire trois fois seulement le nombre à répéter et de prendre dix fois la somme, ou de faire suivre cette somme d'un zéro : on aura donc

2.° . . . . 40440.

Enfin, au lieu d'écrire 200 fois le nombre 1348, et de faire l'addition, on peut l'écrire 2 fois seulement, et prendre 100 fois la somme, c'est-à-dire, la faire suivre de deux zéros. On aura donc

3.° . . . . 269600.

Ce que nous venons de dire est résumé dans les trois tableaux suivans, qui offrent les trois additions abrégées dans lesquelles on vient de décomposer l'addition totale :

1.er	2.e	3.e
1348	1348	1348
1348	1348	1348
1348	1348	2696
1348	4044	
5392		

le résultat de la seconde addition devant être pris 10 fois, et celui de la troisième devant être pris 100 fois, comme nous l'avons observé.

Cependant l'opération n'est pas encore amenée au dernier degré de simplification.

On remarquera que, dans chacune de ces additions partielles, on n'a jamais à répéter les chiffres 8, 4, 3, 1 qu'un nombre de fois, marqué par l'un des chiffres depuis 1 jusqu'à 9 inclusivement : or, répéter les chiffres des unités, des dixaines, centaines, mille, par exemple, 4 fois, comme on doit le faire dans la première addition, revient évidemment à répéter 4 fois chacun de ces chiffres, considéré comme représentant des unités, et à compter les résultats en unités, dixaines, centaines, mille, ayant soin de tenir compte des retenues en dixaines, centaines, mille pour les ajouter à 4 fois le chiffre à gauche de celui qu'on vient de répéter.

On est donc conduit à ces nouvelles abréviations des trois additions précédentes :

1.er	2.e	3.e
1348	1348	1348
4	3	2
5392	4044	2696

4044 devant compter des dixaines, et 2696 des centaines.

Mais au lieu d'écrire 3 fois le nombre 1348 pour le répéter d'abord 4 fois, puis 3 fois, puis 2 fois, on peut n'écrire qu'une seule fois ce nombre, et au-dessous celui qui indique combien de fois on doit le répéter, en cette manière :

	1348
	234
(1°) . . .	5392
(2°) . . .	40440
(3°) . . .	269600
	315432.

La somme (1°) est donnée par 1348 répété 4 fois ; la somme (2°) par 1348 répeté 30 fois, ou plutôt 3 fois, le résultat étant pris en dixaines ; la somme (3°) par 1348 répeté 200 fois, ou 2 fois, et le résultat étant pris en centaines, ou suivi de deux zéros. On peut même se dispenser d'écrire les zéros à droite dans les sommes partielles (2°), (3°) ; seulement on aura soin de reculer les chiffres de la seconde somme d'un rang, ceux de la troisième de deux rangs, etc. vers la gauche.

A l'effet de faciliter l'opération précedente, *Pythagore* a imaginé une table offrant toutes les sommes de nombres depuis 1 jusqu'à 9, répetés chacun 1, 2, 3 . . . . 9 fois, sommes qu'il est nécessaire de retenir. On la trouve ici étendue jusqu'à 12.

TABLES DE PYTHAGORE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3.	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

(28) L'opération ainsi simplifiée, s'appelle *multiplication*; le nombre qu'on répète, est dit *multiplicande*; celui qui indique combien de fois on doit le répéter, est dit *multiplicateur*; le résultat de l'opération s'appelle *produit*; les sommes partielles se nomment *produits partiels*. Le multiplicande et le multiplicateur se nomment *facteurs*, parce que c'est avec ces nombres qu'on fait l'opération.

(29) L'unité du multiplicateur est toujours *une fois*, et, pour cette raison, le multiplicateur est dit *nombre abstrait* : l'unité du multiplicande étant matérielle, par exemple, un homme, un franc, un mètre, etc., est dite *concrète*, ainsi que le multiplicande lui-même : comme le produit n'est qu'une répétition du multiplicande, son unité est nécessairement de même dénomination que celle du multiplicande.

(30) On appelle *multiple* d'un nombre tout produit de ce nombre par un nombre entier : ainsi les produits d'un nombre par 2, 3, 4, etc. sont dits *les multiples deux*, *trois*, *quatre*, etc. de ce nombre, ou encore *le double*, *le triple*, *le quadruple*, etc. de ce nombre.

(31) Il suit de la définition (27) de la multiplication, que *le pr duit contient le multiplicande, autant de fois que le multiplicateur contient l'unité.*

(32) Les produits partiels dont la somme donne le produit total, étant précisément en même nombre que les chiffres du multiplicateur, il serait avantageux de prendre pour multiplicateur le plus petit des deux facteurs, si d'ailleurs on pouvait indifféremment faire du multiplicande le multiplicateur, et réciproquement ; ce qui est une vérité de fait.

Il est donc nécessaire de démontrer que *le produit reste de même grandeur, quel que soit l'ordre suivant lequel on multiplie les facteurs.*

Nous prouverons, par exemple, que le produit de 8 par 6, est le même que celui de 6 par 8. A cet effet, écrivons 8 sous cette forme

1 1 1 1 1 1 1 1 :

il ne s'agira, pour obtenir le produit de 8 par 6, le nombre 8 étant multiplicande, que d'écrire cette ligne six fois horizontalement, et de *sommer* toutes les unités : on aura ainsi :

A	1	1	1	1	1	1	1	1	B
	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	1	1	
C	1	1	1	1	1	1	1	1	

AB représentant le multiplicande, et AC le multiplicateur : or, il est visible qu'on peut *sommer* de deux manières les unités de ce tableau, soit en répétant la pre-

mière ligne AB autant de fois qu'elle est écrite horizontalement, ce qui revient à répéter 8 six fois; soit en répétant la ligne AC autant de fois qu'elle est écrite verticalement, ce qui revient à répéter 6 huit fois : donc, etc.

En faisant le même raisonnement sur deux autres facteurs quelconques, on étendra la même conclusion à ces facteurs.

On pourra donc toujours prendre le plus grand des deux facteurs pour multiplicande, ce qui donnera le plus petit nombre de produits partiels, en sorte que l'addition de ces produits n'en sera que plus facile. Voyez le complément de cette proposition (65).

(33) *Lorsque l'un des facteurs ou tous les deux sont terminés par des zéros, on fait abstraction de ces zeros dans la multiplication, puis à la droite du produit on écrit autant de zéros qu'on en a supprimés dans les facteurs.*

Pour démontrer cette proposition, supposons 1°, que le multiplicande seul soit terminé par des zéros : après la suppression de ces zéros, le multiplicande compte autant d'unités qu'il comptait de dixaines, de centaines, de mille, etc. : mais le multiplicateur n'ayant pas changé, le produit qu'on obtient compte autant d'unités que le véritable doit compter de dixaines, de centaines, de mille, etc. : il faut donc faire compter à ce produit des dixaines, des centaines, des mille, etc., ce qui revient à écrire à sa droite, un, ou deux, ou trois zéros, etc., c'est-à-dire, autant de zéros qu'on en a supprimés au multiplicande.

2.° Que le multiplicateur seul contienne des zéros à sa droite : ce cas rentre dans le précédent, en observant qu'on peut prendre le multiplicateur pour multiplicande, et réciproquement. Autrement, en partant de ce principe que *le produit contient le multiplicande, comme le multiplicateur contient l'unité* (31), on dira : puisqu'après la suppression des zéros, le multiplicateur n'est, par exemple, que le centième du véritable, le produit corres-

pondant n'est pareillement que le centième du véritable produit; il faudra donc le multiplier par 100, c'est-à-dire, en général, le faire suivre d'autant de zéros qu'on en a supprimés à la droite du multiplicateur.

3.° Supposons qu'on ait supprimé des zéros dans les deux facteurs, par exemple, trois à la droite du multiplicande et deux à la droite du multiplicateur, ou, pour fixer les idées, qu'on ait à ces deux facteurs 7000 et 300, substitué 7 et 3 : pour passer du produit de 7 par 3, qui est 21, au produit de 7000 par 3, il faudra, d'après ce qui a été dit 1.°, écrire trois zéros à la suite de 21, et on aura 21 000 : ensuite, pour passer de ce dernier produit à celui de 7000 par 300, il faudra, d'après ce qui a été démontré 2.°, écrire encore deux zéros à la suite de 21000, ce qui donnera enfin 2100000 pour le produit de 7000 par 300. On est donc conduit à la règle énoncée.

(34) *Tout produit a autant de chiffres, ou un chiffre de moins qu'il y en a en somme dans les deux facteurs.*

Qu'on ait à multiplier un nombre quelconque par 324, par exemple, le produit sera moindre que celui du nombre donné par 1000, et plus grand que celui du même nombre par 100, puisque le multiplicateur 324 est compris entre 1000 et 100 : or, le nombre ayant, par hypothèse, cinq chiffres, son produit par 1000 en aura huit, et son produit par 100 en aura sept : donc le produit cherché aura ou sept ou huit chiffres : donc, etc.

Multiplication des nombres décimaux.

(35) Nous distinguerons trois cas dans cette multiplication,

1° celui d'un nombre décimal	à multiplier	un nombre entier;
2° celui d'un nombre entier		un nombre décimal;
3° celui d'un nombre décimal	par	un nombre décimal.

De ce principe posé (31) que *tout produit contient le multiplicande comme le multiplicateur contient l'unité*, il suit 1.°, que le multiplicateur étant un nombre entier, le pro-

duit est plus grand que le multiplicande; 2.° que le multiplicateur étant l'unité, le produit est égal au multiplicande; 3.° que le multiplicateur étant un dixième, un centième, un millième, etc., de l'unité, le produit est un dixième, un centième, un millième, etc. du multiplicande. Si, par exemple, le multiplicateur est 0,97, il faudra prendre le centième du multiplicande, et le répéter 97 fois, ou bien répéter le multiplicande 97 fois et prendre le centième du produit. Ces notions posées, nous allons traiter les trois cas distingués ci-dessus.

1.er *Cas.* Qu'on ait 24, 238 à répéter 36 fois : il est évident que vingt-quatre mille, deux cent trente-huit millièmes répétés 36 fois, donnent autant de millièmes, que vingt-quatre mille, deux cent trente-huit unités répétées 36 fois, donnent d'unités. Au reste, on peut encore considérer que cette opération revient à l'addition de 36 nombres tels que 24, 238.

Donc, *pour multiplier un nombre décimal par un nombre entier, il faut faire abstraction de la virgule dans le multiplicande, et détacher par une virgule vers la droite du produit, autant de décimales qu'il y en a au multiplicande.*

2.e *Cas.* Qu'on ait à multiplier 2324 par 1, 232 : il faudra, conformément au principe énoncé ci-dessus, prendre le millième de 2324, qui est 2, 324 et répéter ce dernier nombre 1232 fois. Par cette considération, on fait rentrer ce cas dans le premier, et comme le multiplicande a pris autant de décimales qu'il y en avait au multiplicateur, on est amené à cette règle:

Pour multiplier un nombre entier par un nombre décimal, il faut faire abstraction de la virgule au multiplicateur, et détacher par une virgule vers la droite du produit autant de décimales qu'il y en a au multiplicateur.

3.e *Cas.* Soit 2, 32 à répéter 1,2 fois : comme le multiplicateur est le dixième de l'unité, répété 12 fois, on aura donc à prendre le dixième du multiplicande, et à

le répéter 12 fois : or, ce dixième du multiplicande, est 0, 232 (19), qu'il faut multiplier par 12; ce qui rentre dans le premier cas, et on observe que le multiplicande a pris autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs donnés. On est donc conduit à cette règle :

Dans la multiplication de deux nombres décimaux, il faut procéder comme si les deux facteurs étaient entiers, et détacher par une virgule vers la droite du produit, autant de décimales qu'il y en a, en somme, dans les deux facteurs.

Il a donc suffi de démontrer le procédé de la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier, lequel se déduit de l'addition des nombres décimaux.

(36) Puisqu'on est toujours ramené à regarder les deux facteurs comme des nombres entiers, on peut dire qu'il est encore permis ici de faire du multiplicande le multiplicateur, et réciproquement (32).

(37) Les opérations sur les nombres décimaux, étant de la plus grande importance depuis l'établissement du *système métrique*, on doit en démontrer les règles directement, et non les déduire comme cas particuliers de celles des fractions ordinaires, ce qui n'empêchera pas de montrer en son lieu que les premières sont comprises dans les secondes.

(38) S'il ne s'agit que d'indiquer la multiplication de deux nombres, on interpose entre les deux facteurs le signe $\times$ qui se lit : *multiplié par;* ainsi 12×7 annonce la multiplication de 12 par 7 : de même $2 \times 3 \times 4 \times 5$ indique que le produit de 2 par 3 doit être multiplié par 4, et que ce dernier produit doit être multiplié par 5.

De quelques usages et abréviations de la Multiplication.

(39) La multiplication sert 1.° à trouver la valeur de plusieurs unités, lorsque l'on connaît la valeur de l'une d'elles; 2.° à convertir les grandes mesures en plus petites.

Problème I. *Trouver le prix de* 5842 *mesures, à raison de* 54 *francs la mesure.*

On observera que puisqu'une mesure coûte 54 francs, les 5842 mesures coûteront 5842 fois 54 francs : il faudra donc prendre 54 francs pour multiplicande, et 5842 pour multiplicateur, parce que ce facteur doit toujours être abstrait (29) : alors, suivant la condition de l'énoncé, le produit comptera des francs. Cependant rien n'empêche de prendre 5842 pour multiplicande, et 54 pour multiplicateur (32), pourvu qu'on compte le produit en francs.

Lorsque les deux nombres donnés sont *concrets* (29), comme dans cet exemple, le seul énoncé de la question détermine le choix du multiplicande, et conséquemment celui du multiplicateur : en effet, dans la question précédente, le produit devant compter des francs, on doit prendre pour multiplicande celui des deux nombres qui compte des francs ; l'autre, considéré comme nombre abstrait, servira de multiplicateur.

Probl. II. *Trouver le prix de* 54 *mètres, à raison de* 25 *fr. pour* 5 *mètres.*

On dira : puisque 5 mètres coûtent 25 francs, 1 mètre ne doit coûter que 5 fr. : donc la question est ramenée à celle-ci qu'on sait résoudre : *un mètre coûtant* 5 *fr., combien coûteront* 54 *mètres?*

Probl. III. *Convertir* 365 *jours*, 5 *heures*, 48 *minutes*, 49 *secondes, en secondes.*

On réduira d'abord les 365 j en heures, à raison de 24 heures par jour, et à ce produit on ajoutera 5 heures ; puis on réduira ce résultat en minutes, à raison de 60 minutes par heure, et au résultat on ajoutera 48 minutes : puis on réduira ce dernier nombre en secondes, et au résultat, on ajoutera 49 secondes.

Il sera nécessaire de multiplier ces applications.

(40) Parmi les nombreux artifices de calcul au moyen

desquels on peut abréger la multiplication, nous nous bornerons à en indiquer deux qui réduisent au plus petit nombre possible celui des produits partiels.

Supposons d'abord qu'on ait à multiplier un nombre par 999 : on répètera le nombre 1000 fois, et comme on le prend une fois de trop, il faudra du produit retrancher le nombre lui-même. Ainsi le multiplicande étant 47896, par exemple, le produit par 1000 sera 47896000, d'où retranchant 47896, il reste 47848104. Le multiplicateur étant 99988, c'est-à-dire, 100000 diminué de 12, on écrira cinq zéros à la droite du multiplicande, et de ce nombre on retranchera 12 fois le multiplicande qui a été répété 12 fois trop.

Nous ferons connaître la seconde espèce d'abréviation sur un exemple. Soit

à multiplier. . . .	34562494	
par.	12366459	
	311062446	. . . (1°)
	1555312230	. . . (2°)
	207374964	. . . (3°)
	1244249784	. . . (4°)
	414749928	. . . (5°)
	427415664988746.	

On ne trouve ici que cinq produits partiels au lieu de huit, parce qu'on a détaillé le multiplicateur, en allant de droite à gauche, dans ces portions 9, 45, 6, 36 et 12 qui comptent des unités, des dixaines, des mille, des dixaines de mille, des millions. Le produit (1°) est le multiplicande répété 9 fois : le produit (2°) est le multiplicande répété 45 fois, et on l'obtient en répétant 5 fois le produit (1°), parce que le multiple 45 d'un nombre, n'est autre chose que 5 fois le multiple 9 du même nombre; les chiffres de ce second produit sont reculés d'un rang vers la gauche : le produit (3°) est le multi-

plicande pris 6 fois, ce produit devant compter des mille. Le produit (4°) est le multiplicande par 36, ou le multiple 6 du produit (3°), en observant que 36 est 6 fois 6 : ce produit compte des dixaines de mille. Enfin, le produit (5°) est le multiplicande répété 12 fois, ou le multiple 2 du produit (3°), et ce produit compte des millions.

Il peut arriver que les deux facteurs soient composés d'un grand nombre de chiffres, auquel cas l'opération offre des chances multipliées d'erreurs, qu'on évitera par le procédé suivant. Soit à effectuer le produit des deux nombres

13245 67381 92864
92316 45782 81065.

On fera sur un carré de papier à part, cette table auxiliaire des multiples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 du multiplicande:

1.	13245	67381	92864
2.	26491	34763	85728
3.	39737	02145	78592
4.	52982	69527	71456
5.	66228	36909	64320
6.	79474	04291	57184
7.	92719	71637	50048
8.	105965	39055	42912
9.	119211	06437	35776

Pour avoir le multiple 3, on ajoute les multiples 2 et 1 : pour le multiple 4, on double le multiple 2 : pour le multiple 5, on ajoute les multiples 3 et 2 : pour le multiple 6, on double le multiple 3 : pour le multiple 7, on ajoute les multiples 3 et 4 : pour le multiple 8, on double le multiple 4 : enfin, pour le multiple 9, on ajoute les multiples 4 et 5. On observera que les deux multiples qu'on ajoute, sont toujours immédiatement l'un au-dessous de l'autre. Cette table bien vérifiée donnera tous les produits partiels du multiplicande par tous les chiffres du multiplicateur. D'abord elle fournira les cinq

premiers multiples 5, 6, o, 1, 8 qu'on écrira les uns au-dessous des autres, ayant soin de reculer les multiples 6, o, 1, 8 d'une, de deux, de trois et quatre places vers la gauche par rapport au rang des unités du multiple 5 : puis on fera de suite la somme de ces cinq produits, laquelle sera déjà le produit du multiplicande par la première tranche 81065 du multiplicateur. Au-dessous de cette somme, on écrira convenablement les multiples 2, 8, 7, 5, 4 du multiplicande, puis on fera la somme de la somme précédente et de ces cinq derniers produits, laquelle sera le produit du multiplicande par la portion 45782 81065 du multiplicateur. Enfin à cette dernière somme on ajoutera celle des multiples 6, 1, 3, 2, 9 du multiplicande, et on aura le produit total.

Division des nombres entiers.

(41) *Etant donnés le produit et l'un des facteurs, trouver l'autre facteur.*

Cette question est l'inverse de celle qui a donné lieu à la multiplication.

Si l'on se rappelle qu'on peut prendre à volonté l'un des facteurs pour multiplicande (32), l'énoncé que nous venons de poser, reviendra toujours à celui-ci : *étant donnés le produit et le multiplicande, assigner le multiplicateur*, ou bien *étant donnés la somme et le nombre constant ajouté, découvrir le nombre de fois qu'il a été ajouté.*

Pour résoudre cette dernière question, il est tout simple de soustraire de la somme le nombre répété, ce qui donne un reste, de soustraire le même nombre du reste, ce qui donne un second reste, et de procéder de cette manière, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste nul : si l'on compte alors le nombre de soustractions qu'on a faites, on connaîtra le nombre de fois que le nombre a été répété.

Pour faire mieux entendre ce que nous venons de dire, proposons-nous de trouver combien de fois on a répété 12 pour avoir 144, ce qui revient à chercher combien de fois 12 est dans 144 : on dira

de	144
ôtant	12
1.er reste	132
ôtant	12
2.e reste	120
ôtant	12
3.e reste	108
ôtant	12
4.e reste	96
ôtant	12
5.e reste	84
ôtant	12
6.e reste	72
ôtant	12
7.e reste	60
ôtant	12
8.e reste	48
ôtant	12
9.e reste	36
ôtant	12
10.e reste	24
ôtant	12
11.e reste	12
ôtant	12
12.e reste	0

Dans cet exemple, on a fait douze soustractions, avant d'en venir à un reste nul ; d'où l'on conclut que 12 est

douze fois dans 144. Il est clair que cette opération sera d'autant plus longue que le nombre contenu sera plus petit par rapport à celui qui le contient : il importe donc de chercher à l'abréger, et c'est ce que nous allons faire sur l'exemple précédent.

Nous chercherons combien de fois 12 peut être ôté de 14 dixaines : on observera que puisque 12 peut être ôté 1 fois de 14 unités avec le reste 2, il pourra l'être 10 fois de 14 dixaines avec le reste 20, puisqu'on a fait dix soustractions dont chacune a donné le reste 2 : il reste à compter combien de fois 12 peut être ôté de ce reliquat 20 ajouté à 4, c'est-à-dire, de 24 : la réponse est 2 avec le reste 0 : ainsi le nombre 12 peut être retranché 10+2 fois, ou 12 fois de 144 : d'où on conclut que 12 est 12 fois exactement dans 144.

Supposons, en second lieu, qu'on ait à trouver combien de fois 122 est dans 1464 : on cherchera combien de fois 122 peut être soustrait de 146 dixaines, ou plutôt de 146 unités : on trouvera qu'il peut être ôté 1 fois avec le reste 24 : d'où on conclura que de 146 dixaines, 122 peut être ôté 10 fois avec le reste 240 : ajoutant ce reste à 4 unités, on aura à chercher combien de fois 122 peut être soustrait de 244 : la réponse est 2 fois avec un reste nul. Ainsi 122 est contenu 12 fois dans 1464.

On est donc naturellement conduit à ce dispositif :

	1464	122
	122	10
	244	2
	244	12
reste. . . .	0	

et à ce procédé : on détache dans le nombre 1464, et vers la gauche, un nombre 146 qui, considéré comme comptant des unités, soit capable de contenir 122, et on trouve

que 146 contient 1 fois 122 avec le reste 24 : mais, en repassant de 146 unités à 146 dixaines, on a 10 avec le reste 240 : ce nombre 10 est écrit au-dessous de 122, et au reste 240 on a joint les 4 unités, ce qui donne 244 qu'on voit écrit au-dessous de 122 : de ce reste on peut ôter 2 fois 122; on écrit 2 sous 10, et le reste correspondant est nul. Maintenant, ajoutant 10 et 2, on a 12 qui compte le nombre total des soustractions. On remarquera qu'on aurait pu écrire le résultat 2 à la droite du précédent 1, et éviter par-là une addition.

Cette opération a été nommée *division :* le nombre qui contient ou qui est donné comme produit, se nomme *dividende :* le nombre contenu, est appelé *diviseur;* et le résultat de l'opération, c'est-à-dire, le nombre qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, s'appelle *quotient.* On dit abréviativement qu'on divise le dividende par le diviseur, énonciation dont nous fixerons l'acception.

Pour familiariser avec la division, nous rechercherons encore le nombre de fois que 122 est contenu dans 28 548 : après avoir détaché vers la gauche du dividende, la partie 285 centaines que nous compterons un moment pour 285 unités, on dira : 285 unités contiennent 2 fois 122 unités et en sus 41 unités ; en sorte que 285 centaines contiendront 200 fois 122 et en sus 4100 unités. A ce reste 4100 ou 410 dixaines, on ajoutera les 4 dixaines du dividende, c'est-à-dire, le chiffre immédiatement consécutif à 285, et on aura 414 dixaines qu'on prendra pour 414 unités qui contiennent 3 fois 122 unités avec le reste 48 : mais en repassant de 414 unités au même nombre de dixaines, on a le quotient 30, au lieu de 3, et le reste 480 au lieu de 48 : à ce reste 480 unités, nous ajouterons les 8 unités du dividende, ce qui donnera 488 unités qui contiennent 4 fois 122 avec le reste zéro. Ainsi on a pu retrancher $200+30+4$ fois, c'est-à-dire, 234 fois 122 du nombre

proposé. D'après ce que nous avons déjà dit plus haut, on disposera l'opération comme il suit :

285 48	122	
244	200 . . .	1.er quotient.
41 4	30 . . .	2.e quot.
36 6	4 . . .	3.e quot.
4 88	234	quot. total.
4 88		
0		

Mais en écrivant les chiffres du quotient à la droite les uns des autres, à mesure qu'on les obtient, on évite l'addition des quotiens partiels. Les portions du dividende qu'on divise successivement par 122, savoir : 285; 414; 488 se nomment *dividendes partiels*, et les chiffres 2, 3, 4 du quotient total, sont dits *quotiens partiels*.

(42) Ces détails sont longs, mais indispensables, parce que de toutes les opérations de l'arithmétique, la division est, sans contredit, celle qui offre la théorie la plus délicate, et le plus de difficultés dans la pratique. A cette occasion, nous citerons une réflexion judicieuse de l'infortuné *Marquis de Condorcet* (*), *secretaire perpétuel de l'ancienne Académie des Sciences* : « La division est, dit-il, un des premiers » points où l'expérience ait prouvé qu'il se faisait une sorte » de séparation des esprits : beaucoup d'hommes, dans les » professions où le calcul est nécessaire, se trouvent arrêtés » à ce terme; ils n'ont pas mis le temps et l'application né» cessaires pour le franchir; alors la méthode par la sous» traction immédiate, sera pour eux un supplément utile. »

Autre manière d'envisager la Division.

(43) Pour commencer par le cas le plus simple, proposons-nous de chercher combien de fois un nombre

(*) Il a été, avec *Bailly* et *Lavoisier*, l'une des victimes les plus célèbres de la révolution française.

d'un seul chiffre est contenu dans un nombre d'un ou de deux chiffres, au plus. Ou le dividende sera un multiple exact du diviseur, ou il ne le sera pas : dans le premier cas puisqu'on connaît le produit et l'un des facteurs, la Table de *Pythagore* (27) donnera l'autre facteur. Ainsi, par exemple, étant donnés le nombre 72 comme dividende, et 9 comme diviseur ou comme l'un des facteurs de 72, on cherchera dans l'aire de la table, le produit 72, et on trouvera que ce nombre a pour facteurs 9 et 8 : or, le facteur 9 étant déjà donné, le facteur cherché sera 8. Dans le second cas, si le dividende donné est, par exemple, 74, le diviseur étant toujours 9, comme 74 tombe entre deux produits exacts et consécutifs de la table, savoir : 72 et 81, on conclura que 74 est 8 fois 9 plus deux unités; donc le quotient est 8, et 2 est le reste de la division : ainsi on n'a réellement divisé par 9 que le plus grand multiple de 9 contenu dans 74.

Proposons-nous, en second lieu, de diviser un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, et, pour plus de facilité, nous prendrons pour dividende un multiple exact du diviseur (30). Soit donc 1296 à diviser par 9 : il s'agit d'assigner le nombre nommé quotient qu'il a fallu répéter 9 fois pour avoir 1296. Nous montrerons d'abord l'impossibilité, du moins en général, d'obtenir ce quotient dans le sens de droite à gauche, c'est-à-dire, à la manière des résultats de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. En effet, il est clair ici que les unités du produit, qui ne sont qu'au nombre de six, ne peuvent être le produit de celles du quotient par 9, puisqu'un produit est toujours plus grand que chacun des facteurs; il faut alors supposer que le produit du chiffre inconnu des unités du quotient, par 9, a donné quelques dixaines qui ont été ajoutées au produit de celles du même quotient par 9 : ainsi puisqu'on ne connaît pas la totalité des unités du pro-

duit, on ne peut, quoiqu'on ait l'un des facteurs, découvrir l'autre facteur, c'est-à-dire, le chiffre qui compte les unités du quotient; donc enfin on ne peut procéder de droite à gauche dans la recherche des chiffres du quotient : il faut donc les rechercher dans le sens de gauche à droite, c'est-à-dire, en commençant par le chiffre des plus hautes unités. Or, le quotient ne peut avoir d'unités d'un ordre supérieur aux centaines : car si on lui supposait seulement une unité de mille, cette unité répétée 9 fois, donnerait, au moins, 9 unités de mille au produit ou au dividende qui n'en a qu'une seule. Ainsi le chiffre des plus hautes unités du quotient compte des centaines; d'où on conclut que le quotient a trois chiffres qui sont trois inconnues à découvrir successivement : or, les raisonnemens qui serviront à faire trouver l'un de ces chiffres, nous conduiront à découvrir chacun des autres. On observera que les centaines du quotient, répétées 9 fois, ne pouvant produire que des centaines, c'est dans les 12 centaines du dividende qu'il faut chercher le produit de celles du quotient par 9, produit qui peut être augmenté des retenues en centaines dues aux dixaines et aux unités du quotient, multipliées par 9 : ainsi le chiffre des centaines du quotient, doit être tel que, répété 9 fois, on ait pour produit 12, ou le multiple de 9, le plus approchant, en moins, de 12. Le nombre qui vérifie cette condition, est 1 : mais 1 centaine multipliée par 9, donne 9 centaines, tandis que le dividende en contient 12; la différence 3 centaines est donc la retenue qui est due au surplus du quotient, pris 9 fois. Si maintenant on retranche les 9 centaines, c'est-à-dire, 900 du produit total 1296, le reste 396 se composera des produits des dixaines et des unités du quotient par 9 : en sorte que la question sera réduite à trouver le nombre qui, multiplié par 9, a donné le produit 396, question de même énoncé que la précédente et dont la résolution donnera 44 pour les deux derniers chiffres du quotient.

Soient enfin un produit et un facteur de plusieurs chiffres, et, par exemple, 2191164 à diviser par 2346 : on reconnaîtra facilement que le quotient ne peut avoir d'unités d'un ordre supérieur aux centaines, puisque, s'il renfermait seulement une unité de mille, il y en aurait, au moins, 2346 au produit qui n'en contient que 2191 ; le quotient ne peut donc avoir d'unités d'un ordre supérieur aux centaines; donc il a trois chiffres (*) : or, les centaines du dividende, qui sont au nombre de 21911, ne pouvant résulter que des centaines du quotient, répétées 2346 fois, et de la retenue en centaines, due aux dixaines et aux unités du quotient par le diviseur, le chiffre inconnu des centaines, ne peut être que le multiple de 2346, le plus approchant, en moins, de 21911 : le nombre qui vérifie cette condition, est 9; mais 9 centaines multipliées par 2346, donnent 21114 centaines, qui, retranchées de 21911 centaines, laissent l'excédent 797 centaines qui forment la retenue dont il vient d'être question : si l'on abaisse 64 à la droite de ce reste, on a 79764 pour le produit des dixaines et des unités du quotient, par le diviseur, en sorte que la question se réduit maintenant à trouver le nombre qui multiplié par 2346, a donné le produit 79764 : en la résolvant d'après les principes exposés, on trouve d'abord 3 pour le chiffre des dixaines, et 4 pour celui des unités du quotient : le quotient total est donc 934.

(44) On est donc conduit à cette règle générale. *Détachez à la gauche du dividende un nombre qui, considéré comme*

(*) D'après ce qui a été démontré (34), savoir : qu'un produit a autant de chiffres au plus, ou un chiffre de moins, qu'il y en a, en somme, dans les deux facteurs, il est aisé de reconnaître que le dividende qui est le produit, ayant 7 chiffres, et le facteur donné ayant 4 chiffres, l'autre facteur ne peut en avoir plus de trois, et qu'il doit en avoir trois.

comptant des unités, soit capable de contenir le diviseur; cherchez combien de fois ce dividende partiel contient le diviseur; multipliez le diviseur par le chiffre que vous venez de trouver au quotient, et retranchez le produit du dividende partiel : à la droite du reste, abaissez le chiffre du dividende consécutif au premier dividende partiel, ce qui fournira un second dividende, qui, divisé par le diviseur, donnera le second chiffre du quotient; par ce chiffre, multipliez le diviseur et retranchez le produit du second dividende partiel; puis à la droite du reste, écrivez le chiffre du dividende total immédiatement consécutif à celui qu'on vient d'abaisser, et procédez de cette manière jusqu'à ce que vous ayez abaissé le chiffre des unités du dividende, ce qui donne le dernier dividende partiel dont la division par le diviseur fait connaître le dernier chiffre du quotient, c'est-à-dire, celui des unités : le produit du diviseur par ce chiffre, retranché du dividende précédent, donne le reste final qui est zéro, quand la division se fait exactement.

(45) Nous ferons une série de remarques qui complèteront la théorie de la division.

1.° Nous avons dit que chacun des quotiens partiels, est le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende partiel, ce qui suppose évidemment que la retenue donnée par le produit du diviseur par le surplus du quotient, ne peut égaler le diviseur, puisque s'il en était ainsi, le quotient qu'on conclurait, serait plus grand que le véritable. Or, il est clair qu'ayant, par exemple, 345 que nous considérons comme diviseur, à multiplier par 299 qui est le quotient total dont on est supposé n'avoir encore obtenu que le premier chiffre 2, le produit de 345 par 99, ne peut atteindre celui de 345 par 100, en sorte que le premier ne peut donner autant de centaines que le second.

2.° Lorsqu'un dividende partiel et son diviseur sont composés d'un grand nombre de chiffres (le nombre des chiffres

d'un dividende partiel ne pouvant d'ailleurs surpasser celui des chiffres du diviseur que d'une unité, au plus), il n'est pas facile, en général, de découvrir le quotient: dans ce cas on pourra se borner à diviser les plus hautes unités du dividende par celles du diviseur : le quotient obtenu de cette manière, pourra être trop grand; mais aussi il pourra convenir : en général, cette division abrégée donnera la *limite supérieure* du quotient. Qu'on ait, par exemple, à diviser 1196 par 299: on divisera simplement 11 par 2, ce qui donnera le quotient 5 plus grand d'une unité que le véritable quotient 4: cette circonstance tient à ce qu'ici le véritable dividende 4×2 ou 8, est augmenté d'une retenue en centaine, qui est 3 plus grand que le diviseur 2; en sorte que 2 est dans 11 une fois de plus que dans 8: la chose n'arriverait plus dans la division de 2019 par 673, ramenée à celle de 20 par 6 qui donne le quotient 3, lequel est, en effet, celui de 2019 par 673.

3.° On reconnaît qu'un quotient est trop grand, lorsque son produit par le diviseur excède le dividende partiel; dans ce cas, on le diminue successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'il cesse d'être trop grand. Lorsqu'au contraire, on a supposé un quotient trop petit, son produit par le diviseur, soustrait du dividende partiel, donne un reste plus grand que le diviseur; et réciproquement, lorsqu'un reste excède le diviseur, on en conclut que le quotient partiel qu'on vient de trouver doit être augmenté.

4.° Comme tout nombre ne peut être composé que des chiffres depuis 1 jusqu'à 9, il s'ensuit qu'on ne peut poser plus de 9 pour l'un des chiffres du quotient; à moins cependant que le reste de la division précédente n'excède le diviseur, ce qui suppose un quotient trop petit, et alors le quotient suivant, plus grand que 9, fournit une retenue qui s'ajoute à ce quotient précédent et le corrige.

5.° Lorsqu'un dividende partiel ne contient pas le diviseur, on écrit zéro pour le quotient correspondant.

6.° Supposons qu'on ait à diviser 900000 par 299999 : en divisant 9 par 2, on trouve le quotient 3 ; on dit alors 3 fois 2 font 6, qui, retranché de 9, donne le reste 3 : or, de ce que ce reste 3 est égal au quotient 3 supposé, il s'ensuit qu'on peut adopter 3 pour quotient : en effet, ce reste 3 est 300 000, ou 3 × 100 000 plus grand que 3 × 99999, ou que 3 fois le surplus du diviseur. Dans la division

```
7 148 4 | 32 { 35 689
                ------
1 1               2
  14
   2,
```

après avoir détaché à la gauche du dividende, le nombre 71484, on dira : 2 fois 3 font 6, qui, ôté de 7, donne le reste 1 à la droite duquel on abaisse 1, ce qui fait 11 qui contient 2 fois 5 avec le reste 1 à la droite duquel on écrit 4, ce qui donne 14 qui contient 2 fois 6 ou 12 avec le reste 2, ou 200, ou 2 × 100 plus grand que 2 fois 89 : on peut donc, en toute sûreté, poser le quotient 2.

Ainsi, *après avoir fait le produit d'un chiffre du diviseur, par le quotient qu'on essaie, et soustrait ce résultat des unités de même ordre du dividende, si le reste est, au moins, égal au quotient supposé, on est assuré que ce quotient convient, et, à plus forte raison, doit-on l'adopter, lorsque le reste est plus grand que le chiffre qu'on essaie.*

7.° Lorsqu'une division se fait exactement et sans reste, *le dividende est l'exact produit du diviseur par le quotient.*

8.° Lorsque la division ne se fait pas exactement, ce qui a lieu, lorsque le dividende n'est pas un multiple du diviseur, le *reste final* est l'excès du dividende sur l'exact produit du diviseur par le quotient : donc *le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, augmenté de ce reste.* Le quotient qui n'est pas exact, ne diffère pas du véritable d'une unité, puisqu'en l'augmentant d'une unité, il serait trop grand. Dans l'un des

chapitres suivans, nous donnerons le moyen d'obtenir un quotient plus approché, et même aussi approché qu'on voudra du véritable.

9.° Lorsqu'un diviseur est 32, par exemple, il y a 32 contre 1 à parier que la division ne se fera pas exactement. En effet, dans la série des nombres à partir de l'unité inclusivement, les nombres de 32 en 32 sont les seuls exactement divisibles par 32 : donc, pour un nombre divisible par 32, il y en a 31 qui ne le sont pas; c'est-à-dire qu'il y a une chance pour une division exacte, et 31 contre : or, *comme la probabilité de l'arrivée d'un événement est exprimée par une fraction qui a pour numérateur la somme des chances favorables, et pour dénominateur la somme des chances tant favorables que contraires, il s'ensuit que la probabilité d'une division exacte par 32, est* $\frac{1}{32}$ (*Alg.* 2.e *sect.*)

10.° Lorsqu'on divise un nombre par 10, par 100, par 1000, etc., il vient pour quotient tous les chiffres du dividende, distraction faite du dernier, des deux, des trois, etc., derniers chiffres de droite, qui forment le reste de la division : ainsi le nombre 7564 divisé par 10, par 100, par 1000, donne les quotiens 756; 75; 7 avec les restes 4; 64; 564. En effet, 7560 divisé par 10, donne le quotient 756, et il reste 4 qu'on ne peut diviser par 10 : le même nombre est décomposable en 7500 + 64 : or, 7500 divisé par 100 donne le quotient 75, et le reste de la division est 64.

11.° On dit qu'on prend le *sous-multiple* d'un nombre, lorsqu'on divise ce nombre, et que la division se fait exactement. Ainsi les sous-multiples 2, 3, 4, etc., d'un nombre, sont les quotiens de la division exacte de ce nombre, par 2, par 3, par 4, etc. On dit qu'on prend *le multiple* d'un nombre et le *sous-multiple correspondant* d'un autre, quand, par exemple, on multiplie le premier nombre par 5, et qu'on divise le second par 5.

12.° Lorsqu'on sait à *l'avance*, ou, *à priori*, qu'une division se fait sans reste, on peut prendre le même multiple ou le même sous-multiple tant du dividende que du diviseur, sans que le quotient varie, parce que deux nombres se contiennent exactement de la même manière que les doubles, les triples, etc., de ces nombres, ou que leurs sous-doubles, sous-triples, etc. C'est ainsi, par exemple, qu'il revient au même de diviser 3150 par 225, ou leurs sous-multiples 5, c'est-à-dire, 630 par 45, ou encore les sous-multiples 5 de ces derniers, c'est-à-dire, 126 par 9, ou les sous-multiples 9 de ceux-ci, c'est-à-dire, 14 et 1 dont le quotient 14 est le même que celui des nombres proposés.

13.° Si dans une division qui se fait exactement, on prend un multiple quelconque du dividende, en conservant le même diviseur, on obtient le même multiple du quotient. C'est ainsi que 15 divisé par 5 donne le quotient 3, et que 45, triple de 15, divisé par 5, donne le quotient 9, triple de 3.

14.° Si, dans la même hypothèse d'une division exacte, on prend un sous-multiple du dividende, en conservant le même diviseur, il n'arrive pas toujours qu'on ait le même sous-multiple du quotient. Ainsi le dividende 48 divisé par 12, donne le quotient 4, et 24, moitié de 48, divisé par 12, donne le quotient 2, moitié de 4. Mais le dividende 1032 divisé par 24, donne le quotient exact 43, et la moitié 516 divisé par 24, donne le quotient 21 avec le reste 12. Dans le premier cas, la division du quotient par 2 était possible, et dans le second, elle ne l'est plus : toutes les fois donc que le quotient ne peut se diviser par le nombre qui a divisé le dividende, la propriété n'a pas lieu, et, de plus, la division ne se fait plus exactement.

15.° Lorsque, dans une division exacte, on prend un certain multiple du diviseur, en conservant le dividende donné, il arrive quelquefois qu'on a le sous-multiple cor-

respondant du quotient; mais le contraire peut avoir lieu. Ainsi le quotient de 124 par 31, est 4, et celui de 124 par 62, double de 31, est 2, moitié de 4 : tandis que le quotient de 155 par 31 étant 5, celui de 155 par 62, double de 31, est 2 avec le reste 31 ; cette circonstance tient à ce qu'on ne peut prendre exactement la moitié du premier quotient 5.

16.° Lorsque, dans une division exacte, on prend un certain sous-multiple du diviseur, en conservant le dividende donné, on a toujours le multiple correspondant du quotient, ce qui tient à ce qu'un multiple est toujours possible, tandis qu'il n'en est pas ainsi d'un sous-multiple.

Passons au cas où la division ne se fait plus exactement, et où on doit tenir compte de l'influence des variations tant du dividende que du diviseur, non-seulement sur le quotient, mais sur le reste : nous nous bornerons ici aux faits dont nous donnerons l'explication plus loin.

17.° Si l'on prend le même multiple ou le même sous-multiple tant du dividende que du diviseur, le quotient ne varie pas, mais on a le même multiple ou le même sous-multiple du reste. On peut donc, sans altérer le quotient, supprimer le même nombre de zéros à la suite du dividende et du diviseur.

18.° Si l'on prend un multiple du dividende, en conservant le même diviseur, on a le même multiple du reste, et suivant que ce multiple est moindre ou plus grand que le diviseur, on a le même multiple du quotient, ou un multiple plus grand. Ainsi 9 divisé par 8, donne le quotient 1 avec le reste 1, et 18 divisé par 8, donne le quotient 2 avec le reste 2; tandis que 9 divisé par 5, donnant le quotient 1 avec le reste 4, le double 18 divisé par 5, donne le quotient 3 avec le reste 3.

19.° Si l'on prend un sous-multiple du dividende avec le même diviseur, on peut avoir un sous-multiple différent du quotient et du reste. Ainsi 369 divisé par 4, donne

le quotient 92 et le reste 1, tandis que le sous-multiple 3 de 369, c'est-à-dire, 123 divisé par 4, donne le quotient 30 qui n'est pas le tiers de 92, avec le reste 3; ce qui tient encore à ce qu'on ne peut prendre exactement le tiers de 92.

20.° Lorsqu'en conservant le dividende, on prend un certain multiple du diviseur, il peut arriver qu'on ait le sous-multiple correspondant du quotient avec le même reste, ou qu'on ait un sous-multiple non correspondant du quotient avec un reste différent. Ainsi 365 divisé par 2, donne le quotient 182 avec le reste 1, et 365 divisé par 4 donne le quotient 91 avec le reste 1; mais 367 divisé par 2, donne le quotient 183 avec le reste 1, tandis que 367 divisé par 4, donne le quotient 91 avec le reste 3.

21.° Si l'on prend un sous-multiple du diviseur, en conservant le dividende donné, on aura le multiple correspondant du quotient avec le même reste, ou un multiple plus grand avec un reste différent. C'est ce que montrent les deux exemples précédens.

(46) Pour indiquer la division, on interpose deux points entre le dividende et diviseur, en cette manière 28 : 7, pour dire qu'on doit diviser 28 par 7. Nous ferons connaître une autre notation, lorsqu'il sera question des fractions.

Division des nombres décimaux.

(47) Nous distinguerons trois cas, comme nous l'avons fait dans la multiplication

1.° un dividende décimal	à diviser	un diviseur entier;
2.° un dividende entier		un diviseur décimal;
3.° un dividende décimal	par	un diviseur décimal.

On se rappellera, 1.° que lorsqu'une division ne se fait pas exactement, le quotient est le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende : 2.° que le reste de la division, c'est-à-dire, l'excès du dividende sur ce plus

grand multiple, compte toujours des unités de l'ordre inférieur du dividende.

1.° Soit 17,35 à diviser par 12 : de ce que le dividende compte des centièmes, lorsque l'un de ses facteurs 12 est entier, il s'ensuit que le quotient et le reste final doivent compter des centièmes; d'ailleurs il résulte de la règle donnée (35) pour multiplier un nombre décimal par un entier, qu'en passant du dividende 17,35 au dividende 1735, ou plutôt de la partie de 1735 centièmes, exactement divisible par 12, au même nombre d'unités entières, que le quotient qui comptait des centièmes, comptera des unités entières et en même nombre; donc ayant fait la division de 1735 par 12, laquelle donne le quotient 144 et le reste 7, il faudra compter 1,44 et 0,07.

Donc, *dans la division d'un nombre décimal par un diviseur entier, on fera abstraction de la virgule au dividende, et on détachera vers la droite du quotient et du reste, autant de figures décimales qu'il y en a au dividende.*

2.° Soit 1735 à diviser par 0,12 : il résulte encore des règles de la multiplication des décimales, que le quotient ne peut être qu'un nombre entier; mais alors le produit devant avoir deux décimales, si ce n'est dans quelques cas particuliers (*), il faut supposer que le reste final qui s'ajoute au produit du diviseur par le quotient pour former le dividende, a changé les décimales de ce produit en autant de zéros, d'où il suit que ce reste doit compter des centièmes : si donc on restitue au dividende sa forme décimale, on aura 1735,00 à diviser par 0,12 : or, il est clair maintenant que le plus grand multiple de 0,12 contenu dans 1735,00 étant le même que le multiple analogue de 12 par rapport à 173500, on aura 14458

(*) Le produit de 0,25 par 4 est 1; celui de 0,25 par 100 est 25 : si au produit de 0,27 par 2, qui est 0,54, on ajoute 0,46, on aura 1,00 ou 1.

pour le véritable quotient avec le reste 4 qu'il faudra compter en centièmes. En effet, le produit 14458×0,12 ajouté à 0,4, donne 1735.

Donc, *dans la division d'un nombre entier par un nombre décimal, il faut écrire à la suite du dividende autant de zéros qu'il y a de décimales au diviseur, et opérer sur ces nombres comme s'ils étaient entiers ; le quotient ainsi obtenu est exact, et le reste doit compter des unités de l'espèce de celles du diviseur* (*).

Le troisième cas se sous-divise en trois, savoir : le dividende et le diviseur ont même nombre de décimales : le dividende en a plus que le diviseur, ou il en a moins.

3.° Soit 17, 35 à diviser par 0,12 : le quotient en nombre entier doit être le plus grand multiple de 0,12 contenu dans 17,35, lequel est le même que le plus grand multiple de 12 contenu dans 1735 : mais le reste de cette division doit être pris en centièmes : on aura donc le quotient 144 et le reste 0,07.

Donc, *dans la division de deux nombres décimaux ayant même nombre de décimales, il faut procéder comme si les deux nombres étaient entiers : le quotient trouvé dans cette hypothèse, est exact, et le reste doit compter les décimales de l'ordre commun.*

4.° Soit 1,735 à diviser par 1,2 : le quotient doit être en centièmes et le reste en millièmes : mais les nombres 1,735 et 1,2 se contenant exactement de la même manière que leurs multiples 10, qui sont 17,35 et 12, on fera cette division qui rentre dans le premier cas : le quotient comptera, en effet, des centièmes, et le reste 7 devra être pris en millièmes.

(*) Le nombre des décimales du diviseur, étant le même que celui des zéros qui figurent les décimales du dividende, on peut encore dire que le reste compte des unités décimales de l'espèce de celles du dividende, après l'addition des zéros décimaux.

Donc, *lorsque le dividende a plus de décimales que le diviseur, il faut encore opérer comme si les deux nombres étaient entiers ; mais on détachera vers la droite du quotient, un nombre de décimales, égal au surplus des décimales du dividende sur celles du diviseur, et on fera compter au reste des décimales de l'ordre de celles du dividende.*

5.° Soit enfin 173,5 à diviser par 0,012 : on ramènera cette division à celle des multiples 10 des deux nombres, qui sont 1735 et 0,12, et alors on rentre dans le second cas, en sorte qu'on aura à diviser 173500 par 12. Ou bien on pourra, sans altérer le dividende, l'écrire sous la forme 173,500, ce qui ramène au quatrième cas; le quotient sera 14458 et le reste 0,004. En effet, qu'au produit de 14458 par 0,012, qui est 173,496, on ajoute le reste 0, 004, cette addition fera disparaître les millièmes et les centièmes du produit qui n'aura plus qu'une décimale.

Donc, *lorsque le dividende a moins de décimales que le diviseur, il faut compléter au dividende par des zéros, autant de décimales qu'il y en a au diviseur; faisant alors abstraction de la virgule, le quotient trouvé est exact, et le reste compte des unités de l'ordre de celles du diviseur, ou de celles du dividende, après en avoir complété les décimales.*

Dans le quatrième cas, nous n'avons pas prescrit de donner autant de décimales au diviseur, en lui ajoutant deux zéros, qu'il y en a au dividende, parce que ce serait inutilement compliquer la division : c'est par la même raison que nous ne l'avons pas non plus conseillé dans le premier cas. En général, il ne faut recourir à ce moyen, que lorsqu'on ne peut s'en dispenser.

Nous reconnaîtrons bientôt que la première règle sert à évaluer les fractions ordinaires en décimales, et conséquemment à approcher du véritable quotient d'une division non exacte, à moins d'une unité décimale d'un ordre assigné.

(48) Dans l'un des chapitres suivans, nous déduirons toutes ces règles pour la multiplication et la division des décimales, de celles de la multiplication et de la division des fractions ordinaires, en mettant les premières sous la forme de celles-ci : mais par le motif énoncé (37), nous avons cru devoir les établir directement, pour ne rien emprunter d'une théorie étrangère.

(49) Lorsque la division se fait exactement, le dividende contient le quotient autant de fois que le diviseur contient l'unité : d'où il résulte que le dividende est plus grand que le quotient, lorsque le diviseur est plus grand que l'unité; et que le diviseur étant l'unité, le quotient est égal au dividende. Mais que le diviseur soit, par exemple, 0,12 qui signifie 12 fois le centième de l'unité, le dividende sera pareillement 12 fois le centième du quotient; donc le quotient sera 100 fois le dividende divisé par 12. On pourrait tirer de cette considération toutes les règles de la division des nombres décimaux, au moins, dans le cas où elle se fait exactement, puisqu'on a toujours entre le quotient inconnu et le dividende une relation qui énonce l'opération à faire sur ce dernier nombre pour découvrir le premier.

De quelques usages de la Division.

(50) La division sert, 1.° à chercher combien de fois deux nombres de même espèce se contiennent; 2.° à partager un nombre d'une espèce donnée, en un nombre donné de parts ou de parties égales; 3.° à convertir les petites espèces en grandes.

1.° *Trouver combien de fois* 9 *francs contiennent* 3 *francs :* cette question conduit à diviser 9 fr. par 3 fr., et le quotient 3 fois est la réponse à la question.

En général, lorsque le dividende et le diviseur sont de même dénomination, le quotient est un nombre abstrait (29).

2.° *Partager 9 francs entre trois personnes, ou en trois parties égales.*

On observera que si l'on avait 3 fr. au lieu de 9 fr. à partager entre 3 personnes, chacune d'elles aurait 1 fr. pour sa part; que si l'on avait le double de 3 fr. c'est-à-dire, 6 fr. à partager entre 3 personnes, chacune d'elles aurait le double de 1 fr., ou 2 fr. : d'où on conclut qu'autant de fois 3 fr. seront dans 9 fr., autant de fois chacun des partageans aura 1 fr. Ainsi la question reviendra à chercher combien de fois 3 fr. sont dans 9 fr.; mais alors le quotient comptera des francs.

Généralement donc, lorsque le dividende et le diviseur sont d'espèces différentes, le quotient compte des unités de l'espèce de celles du dividende.

Toutes les questions qui conduisent à la division, rentrent dans les deux précédentes, et il n'y a pas lieu à se tromper sur la dénomination du quotient, toujours déterminée par l'énoncé même de la question.

3.° *Convertir un nombre donné de secondes en minutes, heures, jours et ans, s'il y a lieu.* Puisque 60 secondes font une minute, autant de fois 60 sera contenu dans le nombre donné de secondes, autant on devra compter de minutes : ainsi le quotient comptera des minutes, et le reste de cette division comptera des secondes. Pour convertir les minutes du quotient en heures, on dira encore : puisque 60 minutes font 1 heure, il faudra compter autant d'heures que 60 est contenu de fois dans le quotient en minutes, et le reste de cette division comptera des minutes. Pour convertir en jours le dernier quotient qui compte des heures, on observera que 24 heures faisant 1 jour, on doit compter autant de jours qu'il y a de fois 24 dans ce quotient : le reste de cette division sera en heures : enfin, comme l'année se compose de 365^{j}, on divisera le dernier quotient par 365, et le nouveau quotient comptera des années, tandis que le reste de la division comptera des jours.

Nous proposerons deux questions auxquelles il sera indispensable d'en ajouter beaucoup d'autres.

On sait que 5842 *mètres d'un certain ouvrage ont coûté* 315 468 *francs, on demande le prix d'un mètre ?*

Un individu est âgé de 136 307 776 *secondes, combien a-t-il d'années ?*

Preuves de la Multiplication et de la Division.

Résumé.

(51) 1.° Puisqu'un produit contient l'un de ses facteurs autant de fois que l'autre facteur contient l'unité, c'est-à-dire, un nombre de fois marqué par l'autre facteur, on reconnaîtra *qu'un produit est exact, lorsqu'en le divisant par l'un de ses facteurs, on trouvera pour quotient l'autre facteur.*

2.° Lorsque la division se fait exactement, ou sans reste, le dividende contient le diviseur un nombre de fois compté par le quotient : d'où il suit que *le dividende est égal au produit du diviseur, par le quotient* (45, 7.°). Dans le cas d'un reste, il faut concevoir qu'au produit exact de deux facteurs, on ait ajouté un nombre moindre que le facteur pris pour multiplicande, en sorte que lorsqu'on divise ce produit par le multiplicande pris pour diviseur, on a toujours pour quotient le multiplicateur, et pour résidu ou pour reste, le nombre ajouté. Ainsi, *le produit du diviseur par le quotient plus le reste, doit donner le dividende* (45, 8.°).

Ces preuves conviennent également aux nombres décimaux.

(52) Nous avons donc découvert les opérations propres à résoudre ces quatre questions.

1.° Plusieurs nombres inégaux étant donnés, trouver leur somme.

2.° La somme de deux nombres étant donnée avec l'un de ces nombres, trouver l'autre nombre, ou, plus géné-

ralement, étant donnés une somme et l'un de tous les nombres ajoutés, trouver la somme des autres nombres.

3.° Plusieurs nombres égaux étant donnés, trouver leur somme, ou répéter un nombre un certain nombre de fois; question qui n'est qu'une particularité de celle de l'addition.

4.° Connaissant la somme et le nombre répété, trouver combien de fois ce dernier nombre a été répété. Cette question, qui n'est que l'inverse de la précédente, n'est donc que l'inverse d'une particularité de la question qui conduit à l'addition.

(53) C'est par des questions qu'il faut procéder; c'est pour les résoudre qu'on a inventé des opérations : le besoin a présidé à la création de l'arithmétique, et la curiosité qui n'est qu'un besoin de l'esprit, a complété ces premières inventions et en a formé un corps complet et régulier de doctrine.

Les règles que nous venons de démontrer pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres tant entiers que décimaux, s'étendent à tous les systèmes d'arithmétique, en observant seulement de se conformer à la loi de progression des unités, déterminée par le système particulier qu'on adopte : ainsi en passant au *système duodécimal*, par exemple, douze unités d'un ordre en donneront une de l'ordre immédiatement supérieur, et une unité se décomposera en douze de l'ordre immédiatement inférieur. Ainsi que nous l'avons déjà observé (17), les unités analogues aux décimales dérivent de la loi de la progression descendante du système. En sorte qu'on peut dire que la théorie des quatre opérations principales est établie d'une manière générale, quoiqu'elle paraisse restreinte au système décimal.

CHAPITRE V.

De la Multiplication et de la Division des Décimales, sous une condition particulière.

(54) Nous avons démontré (35) qu'un produit doit comporter autant de décimales qu'il y en a, en somme, dans les deux facteurs : cependant, ainsi que nous l'avons déjà insinué (20), et que nous l'expliquerons bientôt avec plus de détails, plusieurs de ces décimales peuvent être superflues, et comme telles elles doivent être rejetées du calcul : on a donc fait des opérations inutiles, et le procédé de multiplication que nous allons exposer, a pour objet de les éviter, en conduisant à un résultat qui n'ait que le degré d'approximation requis par l'état de la question, ou subordonné à la grandeur et à l'espèce de l'unité que l'on considère.

Je suppose qu'on ait effectué la multiplication des deux nombre décimaux

36, 34567	89658
2, 46765	89
72, 69135	79316
14, 53827	15863 2
2, 18074	07379 48
25441	97527 606
2180	74073 7948
181	72839 48290
29	07654 31726 4
3	27111 11069 22
89, 68873	81764 99165 62

cette multiplication a été faite en commençant par la gauche du multiplicateur, et ayant soin d'écrire convena-

blement les produits partiels, d'après ce principe que les décimales d'un produit doivent être en même nombre que celles des facteurs. Si l'on doit s'en tenir aux cent-millièmes, condition qui réduit le produit à 89, 68873 ou plutôt à 89, 68874, en observant que ce qu'on néglige vaut plus d'un demi-cent millième (20), on aura calculé beaucoup trop de décimales, ce qu'on évitera par le procédé suivant

36, 34567	89658
2, 46765	89
72, 69135	8
14, 53827	2
2, 18074	1
25442	0
2180	7
181	7
29	1
3	3
89, 68873	9

que nous allons expliquer. Puisqu'on veut s'en tenir aux cent-millièmes, on pourrait, lorsqu'on procède au produit du multiplicande par le chiffre 2 qui compte des unités, commencer par 2 fois 7 cent-millièmes; mais on perdrait ainsi quelques cent-millièmes donnés par 2 fois 89 dix-millionièmes : comme le chiffre à droite du 9 est plus grand que 5, on comptera 90 au lieu de 89, et on dira : 2 fois 9 millionièmes font 18 millionièmes : posant 8 millionièmes à la droite du trait vertical, et retenant 1 cent-millième, on achèvera ce premier produit partiel. Pour obtenir le second produit par 4 dixièmes, il suffirait de commencer la multiplication au chiffre 6 des dix-millièmes du multiplicande : mais à l'effet de recueillir tous les cent-millièmes, on multipliera le chiffre 7 qu'on comptera pour 8, et on dira : 4 fois 8 font 32 millionièmes, on posera 2 millionièmes, et on retiendra 3 cent-millièmes, puis on achèvera ce produit. Il sera bien facile d'après cette explication de continuer cette opération.

En comparant le produit ainsi obtenu avec le précédent, on reconnaît qu'il y a identité dans les cinq premières décimales, c'est-à-dire, que le produit précédent est exact dans les cent-millièmes.

Si le multiplicatenr contenait des dixaines, des centaines, etc., on commencerait toujours la multiplication par le chiffre des plus hautes unités, sous la condition de recueillir tous les cent-millièmes qui peuvent être fournis par la retenue provenant du produit des unités du multiplicande, inférieures aux cent-millièmes. Si, par exemple, le multiplicateur contenait des centaines, on observerait qne des centaines par des dix-millionièmes donnent des cent-millièmes, en sorte qu'on devrait multiplier les cent-millionièmes et ne prendre de ce produit que la retenue pour l'ajouter au produit des dix-millionièmes par les centaines.

(55) Snpposons maintenant qu'on ait à diviser le produit qu'on vient d'obtenir par 36, 345679 qui est véritablement le nombre pris pour mnltiplicande dans l'exemple précédent. On voit ici l'opération effectuée:

	89, 688739	36, 345679
1.er prod . . .	72, 691358	2, 4676589
1.er rest	16, 997381	
2.e prod	14, 538272	
2.e rest	2, 459109	
3.e prod	2, 180741	
3.e rest	278368	
4.e prod	254420	
4.e rest	23948	
5.e prod	21807	
5.e rest	2141	
6.e prod	1817	
6.e rest	324	
7.e prod	291	
7.e rest.	33	
8.e prod.	33	
8.e rest.	0.	

On a divisé la totalité du dividende par tout le diviseur, ce qui a donné 2 pour premier quotient partiel : le premier reste devient le second dividende partiel qu'on divise par le diviseur, distraction faite du dernier chiffre 9 : on a 4 pour second chiffre du quotient : multipliant le diviseur par ce quotient, on dira : 4 fois 9 font 36 ou 40 qui donne la retenue 4; puis 4 fois 7 font 28 plus 4 font 32; on commence à poser 2 sous 1, et on achève ce produit qu'on retranche du dividende précédent, ce qui donne le second reste qu'on divise par 36, 3456 qui est le diviseur, distraction faite des deux derniers chiffres de droite; le quotient partiel correspondant est 6 : dans la multiplication du diviseur par ce quotient, on compte les 7 cent-millièmes du diviseur pour 8, et on dit : 6 fois 8 font 48 dix-millionièmes qu'on compte pour 5 millionièmes, qui, ajoutés à 6 fois 6 ou 36 millionièmes, font 41 millionièmes : on pose 1 sous 9 et on continue ce produit partiel. Il faut toujours, en passant d'une division à la suivante, distraire le dernier chiffre de droite du diviseur.

Dans cette opération ; les produits 1.er, 2.e, 3.e, etc. ne sont que les produits partiels obtenus dans la multiplication abrégée que nous vérifions : par les soustractions successives de ces produits partiels, on détruit tous les élémens du dividende ou du produit total : c'est ainsi que la division décompose ce qu'a composé la multiplication.

(56) Il faut soigneusement distinguer entre la division précédente et celle qui aurait seulement pour objet de faire trouver le quotient de 89, 688739 par 36, 345679 : pour résoudre cette dernière question, il suffirait de supprimer la virgule dans les deux nombres qui ont même nombre de figures décimales (47, 3.°), et de rechercher le quotient avec l'approximation requise, comme on l'enseignera plus loin : ce quotient ne serait pas le même que le précédent.

Dans une première lecture, les élèves pourront passer ce chapitre sur lequel ils reviendront plus tard.



CHAPITRE VI.

Des Fractions ordinaires.

(57) Une *fraction* est une portion de l'unité : ainsi, par exemple, ces nombres 0,3 ; 0,04, etc. sont des fractions, puisqu'ils ne représentent que trois, quatre, etc. parties d'une unité divisée en dix, cent, etc. parties égales.

Pour rendre plus sensible la génération et les propriétés des fractions, nous représenterons l'unité par une ligne, et conséquemment le nombre sera la réunion du même nombre de lignes égales mises bout à bout.

Supposons maintenant qu'on ait divisé la ligne unité en 8 parties égales, et qu'il s'agisse d'exprimer, par exemple, trois de ces parties : ces trois divisions de la ligne ne peuvent être notées ni par 3 seulement ni par 8 seulement : il faut le concours de ces deux nombres dont le dernier, 8, rappelle qu'on a coupé la ligne unité en huit parties égales, et le premier, 3, qu'on a pris trois de ces parties : on pourra les disposer ainsi :

$$\frac{3}{8}.$$

Cette notation qui n'est qu'une convention, exprime donc *trois huitièmes*, ou trois parties d'une ligne coupée en huit parties égales. La huitième est ici l'*unité fractionnaire :* la réunion de trois de ces unités, est un *nombre fractionnaire* qu'on appelle simplement *fraction.* Le chiffre inférieur 8 s'appelle *dénominateur*, le chiffre supérieur 3 est dit *numérateur.* Le premier donne la dénomination de l'unité fractionnaire, et il fixe la grandeur de cette unité : suivant qu'il est 2, 3, 4, 5, etc., l'unité fractionnaire est dite : *demi*, *tiers*, *quart*, *cinquième*, etc. de

l'unité, et les longueurs de ces sous-divisions, résultent de celle de l'unité divisée. Le chiffre supérieur compte ou nombre les sous-divisions qu'on a prises; il détermine la grandeur du nombre fractionnaire.

Le numérateur et le dénominateur s'appellent *termes* de la fraction.

(58) Tout nombre décimal peut être mis sous forme fractionnaire: par exemple, le nombre 0,7 qui indique 7 parties d'une ligne partagée en dix parties égales, revient à $\frac{7}{10}$.

(59) *Toute fraction dont le numérateur est égal au dénominateur, vaut l'unité.*

En effet, une telle fraction dit qu'on a divisé l'unité en un certain nombre de parties égales, et qu'on a pris la totalité de ces parties.

(60) *La valeur d'une fraction ne change pas, lorsqu'on prend le même multiple ou le même sous-multiple de ses deux termes.*

Reprenons la fraction $\frac{3}{8}$ qui compte trois parties égales d'une ligne coupée en huit parties: si l'on partage la même ligne en seize parties égales, il y aura deux seizièmes dans un huitième, et conséquemment 2×3 ou 6 seizièmes dans trois huitièmes: donc la fraction $\frac{6}{16}$ sera équivalente à la fraction $\frac{3}{8}$, ce qui signifie que les deux fractions $\frac{6}{16}$ et $\frac{3}{8}$ représentent la même portion de la ligne unité. On tire de là cette première conclusion : la valeur d'une fraction reste la même, lorsqu'on double ses deux termes. Que l'on divise la même ligne unité en 24 parties égales, il y aura 3 vingt-quatrièmes dans 1 huitième, et conséquemment 3×3 ou 9 vingt-quatrièmes dans 3 huitièmes: donc les deux fractions $\frac{9}{24}$ et $\frac{3}{8}$ ont même valeur: ainsi, une fraction ne change pas, lorsqu'on prend le triple de ses deux termes. Généralement, lorsqu'on coupe l'unité en 2, 3, 4, etc. fois plus de parties égales, chacune de ces nouvelles sous-divisions,

n'étant que la moitié, le tiers, le quart, etc. de chacune des anciennes, devra être répétée deux, trois, quatre, etc. fois, pour obtenir la même portion de l'unité. Or, pour arriver à cette conclusion, on a pris le même multiple des deux termes de la fraction, ce qui s'accorde avec la règle.

(61) Les fractions peuvent être interprétées de deux manières. Nous savons déjà que cette notation $\frac{3}{4}$ représente trois parties d'une ligne divisée en quatre parties égales : or, si l'on étend bout-à-bout trois lignes égales entr'elles et égales chacune à celle qui figure l'unité, et qu'on divise cette longueur totale en quatre parties égales, l'une de ces parties vaudra évidemment trois des sous-divisions de l'une des lignes partagée en quatre parties, et conséquemment le quart de trois unités sera encore noté par $\frac{3}{4}$.

De ce second point de vue, qui est remarquable, il résulte *qu'on peut encore considérer une fraction comme le quotient d'une division dans laquelle le numérateur a servi de dividende et le dénominateur de diviseur.*

Ainsi, ayant à diviser 7 par 4, on aura le quotient 1 et le reste 3 unités à diviser par 4, ou dont il faut prendre le quart : d'après cela, le quotient complet sera $1+\frac{3}{4}$. On peut donc maintenant, dans tous les cas où la division ne se fait pas exactement, et où le quotient entier est conséquemment en défaut, le compléter (45. 8.°).

(62) Les nombres fractionnaires étant de nouveaux nombres formés de plusieurs unités fractionnaires, il y a lieu à pratiquer sur eux toutes les opérations faites sur les nombres entiers.

Addition, Soustraction et Réduction des Fractions à la même dénomination.

(63) Supposons qu'on ait à ajouter les deux fractions $\frac{7}{16}$ et $\frac{5}{16}$ qui ont un commun dénominateur 16 : la pre-

mière comptant 3 parties d'une ligne coupée en 16 parties égales, et la seconde 5 des mêmes parties, la somme cherchée sera évidemment 8 de ces mêmes parties, c'est-à-dire, $\frac{8}{16}$. Que l'on ait à ajouter $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{16}$ et $\frac{7}{16}$ qui ont encore même dénomination; à la somme des deux premières qui est $\frac{8}{16}$, on ajoutera la troisième $\frac{7}{16}$, ce qui fera $8+7$ seizièmes, ou $\frac{15}{16}$.

Ainsi *la somme d'un nombre quelconque de fractions d'une même dénomination, s'obtient en faisant la somme des numérateurs, au-dessous de laquelle on écrit le dénominateur commun.*

Si à la somme $\frac{15}{16}$ précédemment obtenue, on ajoute $\frac{5}{16}$, on aura, suivant la règle, $\frac{20}{16}$. Pour avoir une idée nette de la signification de cette fraction, on se représentera deux lignes unités mises bout-à-bout et divisées chacune en 16 parties égales : on a pris la totalité de la première ligne, plus quatre parties de la seconde : la fraction $\frac{20}{16}$ vaut donc $1+\frac{4}{16}$, ce qui résulte encore de ce qui a été dit (61). Généralement, suivant que le numérateur d'une fraction est compris entre le dénominateur et son double, entre ce double et le triple, etc., la valeur de fraction tombe entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc.

Soit, en second lieu, la fraction $\frac{3}{16}$ à retrancher de $\frac{5}{16}$: il faut donc de 5 parties d'une ligne coupée en 16 parties égales, retrancher 3 des mêmes parties ; le reste sera évidemment deux de ces parties : donc, *pour soustraire une fraction d'une autre qui a même dénominateur, il faut retrancher le numérateur de la première fraction de celui de la seconde, et au-dessous de la différence écrire le dénominateur commun.*

(64) Jusqu'ici nous avons opéré sur des fractions d'une même dénomination : mais comme il peut arriver qu'elles aient des dénominations différentes, nous avons à reprendre l'addition et la soustraction dans ce cas.

Qu'on ait donc à ajouter les deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$: si l'on pouvait les ramener à avoir même dénomination, la

question serait résolue : or, nous avons démontré (60) que la valeur d'une fraction reste la même, c'est-à-dire, que la fraction représente encore la même portion de l'unité, lorsqu'on a pris le même multiple de ses deux termes : donc, en partant de ce principe, on rappellera les deux fractions à une commune dénomination, en multipliant les deux termes de la première fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 7 de la seconde, et les deux termes de la seconde fraction $\frac{5}{7}$ par le dénominateur 3 de la première : de cette manière, on aura ces fractions $\frac{2 \times 7}{3 \times 7}$ ou $\frac{14}{21}$ et $\frac{5 \times 3}{7 \times 3}$ ou $\frac{15}{21}$, respectivement équivalentes aux proposées et de même dénomination entr'elles. On conçoit maintenant que si l'on avait ces trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ à ajouter et préliminairement à réduire au même dénominateur, on pourrait d'abord effectuer la réduction des deux premières à une même dénomination, opération qui donnerait $\frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ et $\frac{2 \times 2}{3 \times 2}$, c'est-à-dire, $\frac{3}{6}$ et $\frac{4}{6}$ dont la somme est $\frac{7}{6}$; puis, opérant de la même manière sur $\frac{7}{6}$ et $\frac{3}{4}$, on aura ces fractions équivalentes $\frac{7 \times 4}{6 \times 4}$ et $\frac{3 \times 6}{4 \times 6}$, c'est-à-dire, $\frac{28}{24}$ et $\frac{18}{24}$ dont la somme est $\frac{46}{24}$. Mais au lieu d'ajouter d'abord les deux premières fractions $\frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ et $\frac{2 \times 2}{3 \times 2}$, et de réduire leur somme et la troisième fraction $\frac{3}{4}$ au même dénominateur, on pourrait multiplier les deux termes de chacune des deux premières fractions par 4, dénominateur de la troisième, et les deux termes de la troisième par 2×3, dénominateur commun des deux premières, opération qui donne ces fractions $\frac{1 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 4}$, $\frac{2 \times 2 \times 4}{3 \times 2 \times 4}$, $\frac{3 \times 2 \times 3}{4 \times 2 \times 3}$ respectivement égales aux proposées sous le même dénominateur : or, on n'a fait ici que multiplier les deux termes de chaque fraction par le

produit des dénominateurs des deux autres. En général, quel que soit le nombre des fractions ayant des dénominateurs différens, on pourra réduire les deux premières au même dénominateur, puis celles-là et la troisième, puis ces trois premières et la quatrième, et ainsi de suite.

On sera donc conduit à ce procédé général de calcul pour réduire un nombre quelconque de fractions au même dénominateur : *multipliez les deux termes de chacune des fractions, par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

(65) La règle démontrée précédemment pour la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur, suppose qu'un produit résultant des multiplications successives de plusieurs facteurs entr'eux, ne change point, dans quelqu'ordre qu'on effectue ces multiplications : cette proposition démontrée (32) sur deux facteurs, va être généralisée, c'est-à-dire, étendue à un nombre quelconque de facteurs. Nous prouverons donc *qu'un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs, reste numériquement le même, dans quelque ordre qu'on multiplie ces facteurs entr'eux*, ce qu'il suffira de prouver sur trois et quatre facteurs, parce qu'ensuite, on généralisera facilement. Soit, en premier lieu, le produit.

$$3 \times 5 \times 7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.^o) :$$

comme on sait déjà que 3×5 peut être remplacé par 5×3, le produit (1.°) sera donc équivalent au suivant

$$5 \times 3 \times 7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.^o) ;$$

mais puisque dans (2.°), on peut remplacer 3×7 par 7×3, chacun des produits précédens équivaudra donc à

$$5 \times 7 \times 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.^o) :$$

en rapprochant ces résultats (1.°), (2.°) et (3.°), on observe que le facteur 3 y occupe successivement la première, la seconde et la troisième place. Si dans (1.°) on alterne l'ordre des deux derniers facteurs 5 et 7, et si dans (2.°) on alterne celui des deux premiers facteurs 5 et 3, on aura

$$3 \times 7 \times 5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.^o),$$
$$3 \times 5 \times 7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.^o),$$

lesquels rapprochés du produit (3.°), montrent le facteur 5 occupant alternativement la troisième, la seconde et la première place. On pourrait étendre la chose au facteur 7.

Passons à un produit entre quatre facteurs, savoir,

$3 \times 5 \times 7 \times 9$ . . . . (1.°):

des produits égaux $3 \times 5 \times 7$, $5 \times 3 \times 7$, $5 \times 7 \times 3$, on conclut ces produits équivalens au précédent

$5 \times 3 \times 7 \times 9$ . . . . (2.°),

$5 \times 7 \times 3 \times 9$ . . . . (3.°);

mais comme dans ce dernier, on peut alterner l'ordre des deux facteurs 3 et 9, on aura encore le produit équivalent

$5 \times 7 \times 9 \times 3$ . . . . (4.°):

Dans ces résultats (1.°), (2.°), (3.°) et (4.°), on voit que le facteur 3 occupe toutes les places possibles, et il n'est pas difficile maintenant d'étendre la chose aux facteurs 5, 7 et 9, et le raisonnement à tel nombre de facteurs qu'on voudra.

(66) La réduction de deux ou de trois fractions à une commune dénomination, sert encore à reconnaître la plus grande, la plus petite et la moyenne. Qu'on demande, par exemple, quelle est la plus grande des deux fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$: la question se réduirait à comparer les numérateurs, si elles avaient même dénominateur, puisque la plus grande fraction serait évidemment celle qui aurait le plus grand numérateur : on réduira donc les deux proposées au même dénominateur, et de ce que la fraction $\frac{9}{12}$ est plus grande que $\frac{8}{12}$, on conclura que la fraction $\frac{3}{4}$ est plus grande que $\frac{2}{3}$. C'est ainsi qu'on reconnaîtra entre trois fractions la plus grande, la moyenne et la plus petite.

(67) La règle précédente pour rappeler un nombre quelconque de fractions à une commune dénomination, ne souffre aucune exception; mais elle a généralement l'inconvénient de substituer aux fractions données, des fractions équivalentes exprimées par de très-grands termes,

fractions qu'on cherche à éviter, parce qu'elles sont difficiles à soumettre au calcul et à interpréter : en effet, on a une idée plus nette de la fraction $\frac{2}{3}$ que de son équivalente $\frac{24}{36}$.

Dans plusieurs cas, on pourra remplacer le procédé général par le suivant que nous ferons connaître sur un exemple.

Soient les fractions :

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{12}$$

à réduire au même dénominateur : le plus grand dénominateur 12 étant, en même temps, multiple des autres dénominateurs 2, 3, 4 et 6, si l'on divise 12 successivement par 2, 3, 4 et 6, on aura les quotiens 6, 4, 3 et 2 par lesquels il faut multiplier respectivement les deux termes des quatre premières fractions pour les rappeler au dénominateur 12.

Si l'on avait à résoudre la même question sur les fractions

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{6},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{7},\ \frac{19}{21},\ \frac{2}{5},\ \frac{11}{25},$$

on réduirait 1.° les deux premières au dénominateur 12 ; 2.° la quatrième au dénominateur 21 ; 3.° la sixième au dénominateur 25 ; cela fait, on n'aurait plus que trois dénominateurs différens, et s'il fallait ajouter les fractions, on ferait la somme de celles qui ont même dénominateur, ce qui donnerait trois fractions à ajouter, et préliminairement à réduire au même dénominateur.

Dans ces deux exemples, on parvient à un résultat fractionnaire exprimé plus simplement que celui qu'on déduirait de l'application de la règle (64).

(68) On peut encore, dans un grand nombre de cas, recourir au procédé suivant, qui a sur celui que nous venons d'exposer un avantage qui sera facilement apprécié. Mais d'abord nous établirons une définition essentielle.

On appelle *nombre premier* tout nombre qui n'est divi-

sible que par lui-même ou par l'unité : les autres nombres, par opposition aux nombres premiers ou indécomposables en facteurs, sont dits *nombres composés* : ceux-ci sont toujours décomposables en facteurs nombres premiers, tels que 2, 3, 5, 7, etc. : nous donnerons plus loin la manière très-simple d'opérer cette décomposition. Revenons à la question et proposons-nous de réduire au même dénominateur les fractions

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{6},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{14},\ \frac{19}{21},\ \frac{2}{5},\ \frac{7}{15},\ \frac{11}{25}$$

Les dénominateurs	3	sont décomposables en	3
	6		2×3
	12		$2 \times 2 \times 3$
	7		7
	14		2×7
	21		3×7
	5		5
	15		3×5
	25		5×5

or, à l'inspection des dénominateurs décomposés en facteurs, on reconnaît que 2 étant facteur 2 fois au plus, que 3 étant facteur 1 fois au plus, 5 facteur 2 fois au plus, et 7 facteur 1 fois au plus, si l'on multiplie les dénominateurs décomposés

3	respectivement par	$2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7$
2×3		$2 \times 5 \times 5 \times 7$
$2 \times 2 \times 3$		$5 \times 5 \times 7$
7		$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$
2×7		$2 \times 3 \times 5 \times 5$
3×7		$2 \times 2 \times 5 \times 5$
5		$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$
3×5		$2 \times 2 \times 5 \times 7$
5×5		$2 \times 2 \times 3 \times 7$

les dénominateurs résultans seront constamment

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7,$$

c'est-à-dire, composés des mêmes facteurs répétés chacun le même nombre de fois: donc, si l'on multiplie chaque numérateur par le produit des facteurs introduits dans le dénominateur correspondant, on aura des fractions respectivement égales aux proposées, ramenées à une commune dénomination, et exprimées par les plus petits termes possibles, puisque chacun des facteurs premiers 2, 3, 5, 7 n'aura été introduit tant dans les numérateurs que dans les dénominateurs, que le nombre de fois strictement nécessaire pour remplir la condition énoncée.

(69) Tout nombre entier peut être écrit sous la forme d'une fraction ayant un dénominateur donné. *Pour opérer cette transformation, on multiplie le nombre entier par le dénominateur donné, et au-dessous du produit, on écrit ce même dénominateur.* Par-là on a multiplié et divisé, en même temps, l'entier par le même nombre. C'est ainsi qu'on ramène les opérations de l'addition et de la soustraction sur un entier et une fraction, aux mêmes opérations sur deux fractions.

(70) On appelle *fraction vraie* celle dont le numérateur est moindre que le dénominateur, et qui n'exprime qu'une portion de l'unité, pour la distinguer de celle dont le numérateur excède le dénominateur et qui vaut plus d'un entier.

De la Multiplication et de la Division des Fractions.

(71) La multiplication des fractions offre trois cas; savoir :

une fraction	à multiplier par	un entier;
un entier		une fraction;
une fraction		une fraction.

1.er *Cas.* Soit la fraction $\frac{3}{7}$ à multiplier par 4, ou à répéter 4 fois : cette opération revient à l'addition....

$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{12}{7}$ d'après la règle (63).

Généralement donc, *pour multiplier une fraction par un entier, il faut faire le produit du numérateur de la fraction par l'entier, et écrire au-dessous le dénominateur commun.*

D'après cette règle, le produit $\frac{1}{6} \times 2$ est $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, après avoir divisé haut et bas par 2, d'après (60); le produit $\frac{3}{8} \times 2$ est $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$, après avoir divisé haut et bas par 2 ; enfin le produit $\frac{3}{28}$ par 7, est $\frac{21}{28}$, ou $\frac{3}{4}$, après la division des deux termes par 7. On remarque donc qu'on a multiplié les fractions $\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{8}$ par 2, en divisant les dénominateurs 6 et 8 par 2, et conservant les numérateurs; et qu'on a multiplié la fraction $\frac{3}{28}$ par 7, en divisant le dénominateur 28 par 7, et conservant le numérateur 3. Généralement, lorsque le nombre entier par lequel on multiplie, est un diviseur exact du dénominateur de la fraction, le produit est une fraction dont les deux termes ont pour facteur commun l'entier multiplicateur; en sorte que, comme on peut supprimer ce facteur dans les deux termes de la fraction-produit, sans l'altérer, (60), on est conduit à cette seconde règle.

On peut encore multiplier une fraction par un nombre entier, en divisant le dénominateur par cet entier, sans toucher au numérateur.

On observera que cette règle n'est applicable qu'autant que le dénominateur de la fraction est divisible par l'entier, et que, dans ce cas, elle est préférable à la première, parce que la fraction qu'elle donne pour produit est plus simple.

On peut démontrer cette seconde règle directement. En effet, lorsqu'on divise le dénominateur d'une fraction par 5, par exemple, chacune des nouvelles sous-divisions en vaut cinq des premières, et comme on en prend le même nombre, la nouvelle fraction vaut cinq fois la première. Ce tour de raisonnement peut être appliqué dans tous les cas.

Nous démontrerons de suite le procédé pour diviser

une fraction par un entier, parce qu'il nous sera utile pour démontrer le troisième cas de la multiplication.

Puisque le produit $\frac{2}{3} \times 5$ est $\frac{2 \times 5}{3}$, réciproquement le quotient de la division de $\frac{2 \times 5}{3}$ par 5 sera $\frac{2}{3}$. Cette règle suppose que le numérateur de la fraction soit divisible par le nombre entier : or, si l'on avait $\frac{3}{4}$, par exemple, à diviser par 5, on pourrait écrire $\frac{3}{4}$ sous la forme $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$ dont la division par 5 conduit à $\frac{3}{4 \times 5}$. Ce qui donne pour la division d'une fraction par un entier, ces deux règles.

On divise une fraction par un entier, 1.° *en divisant son numérateur par le nombre entier, sans toucher au dénominateur ; 2.° en multipliant son dénominateur par le nombre entier, sans toucher au numérateur.*

Lorsque le premier procédé est possible, on doit le préférer, comme donnant une fraction plus simple.

Ces deux règles peuvent être démontrées directement. Quant à la première, il est visible que, sous le même dénominateur, une fraction est d'autant plus petite que son numérateur est plus petit, et que si, par exemple, on divise le numérateur par 2, 3, 5, etc., on ne prend que la moitié, le tiers, le cinquième, etc. du nombre des mêmes parties. Par la seconde règle, on divise l'unité en 2, 3, 5, etc., fois autant de parties égales, d'où il résulte que chacune des nouvelles sous-divisions n'est plus que la moitié, le tiers, le cinquième, etc. de chacune des premières; et comme on en prend le même nombre, on n'a que la moitié, le tiers, le cinquième, etc. de la première fraction.

2.e *Cas.* Soit 2 à multiplier par $\frac{3}{7}$: en partant de ce principe (31), que le produit se compose du multiplicande de la même manière que le multiplicateur se compose de l'unité, on dira : puisque le multiplicateur est le septième de l'unité, pris 3 fois, le produit cherché sera le septième

du multiplicande, pris 3 fois : or, le septième de 2 est $\frac{2}{7}$; cette fraction répétée 3 fois, est $\frac{6}{7}$.

On multiplie donc un entier par une fraction, en multipliant l'entier par le numérateur de la fraction, et divisant le produit par le dénominateur.

Le produit $\frac{6}{7}$ résultant également de $\frac{3}{7} \times 2$ et de $2 \times \frac{3}{7}$, on conclut *qu'il revient au même de multiplier un entier par une fraction, ou une fraction par un entier.*

3.ᵉ *Cas.* Soit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$: d'après le principe (31), il faut prendre le cinquième de $\frac{2}{8}$, et le répéter 4 fois, c'est-à-dire, diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par 5, et multiplier le quotient par 4 : la première opération donne $\frac{2}{3 \times 5}$, et la seconde donne $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$. La conséquence de ce raisonnement appliqué à deux fractions quelconques, est que

Pour multiplier deux fractions, il faut faire le produit des numérateurs, et écrire au-dessous le produit des dénominateurs.

D'après cette règle, le produit de $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ est le même que celui de $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$. Donc *le produit de deux fractions reste le même, quel que soit l'ordre suivant lequel on les multiplie.*

(72) Lorsqu'on a un entier joint à une fraction, à multiplier par un entier joint à une fraction, on réduit chaque entier au dénominateur de la fraction qui lui est jointe (69), puis réduisant chaque facteur à une fraction, on aura deux fractions à multiplier entr'elles.

(73) La division des fractions offre aussi trois cas, savoir :

une fraction	à diviser par	un entier;
un entier		une fraction;
une fraction		une fraction.

Premier Cas. Ce cas de la division a été traité (71).

2.ᵉ *Cas.* Soit 5 à diviser par $\frac{3}{4}$: le quotient de 5 par 3 est indiqué par la fraction $\frac{5}{3}$: mais le quotient de 5 par le quart de trois, étant quadruple du précédent, sera $\frac{5\times4}{3}$. On pourrait encore réduire l'entier 5 au dénominateur 4, ce qui donnerait la fraction $\frac{20}{4}$ à diviser par $\frac{3}{4}$; et comme deux nombres de quart se contiennent exactement de la même manière que les deux mêmes nombres d'unités entières, le quotient de $\frac{20}{4}$ par $\frac{3}{4}$, sera le même que celui de 20 par 3, c'est-à-dire, $\frac{20}{3}$, ou encore $\frac{5\times4}{3}$, comme précedemment. On peut aussi recourir à la considération suivante qui est simple. Puisque le produit $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}$ est l'unité, le dividende 5 revient à $5\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}$: or, ce produit divisé par $\frac{3}{4}$, qui est l'un de ses facteurs, donne pour quotient $5\times\frac{4}{3}$ qui est l'autre facteur.

On divise donc un entier par une fraction, en multipliant l'entier dividende par le dénominateur de la fraction-diviseur, et divisant le produit par le numérateur de cette fraction ; ce qui revient à multiplier l'entier par la fraction-diviseur inversée.

3.ᵉ *Cas.* Soit $\frac{2}{3}$ à diviser par $\frac{5}{7}$: on ramènera ce cas au précédent, en divisant 2 par $\frac{5}{7}$, et prenant le tiers du quotient, puisque le dividende n'est pas 2, mais le tiers de 2 : or, le quotient de 2 par $\frac{5}{7}$ est, d'après la règle précédente, $\frac{2\times7}{5}$ dont le tiers est $\frac{2\times7}{3\times5}$. On peut encore réduire les deux fractions au même dénominateur, et on aura de cette manière $\frac{2\times7}{3\times7}$ à diviser par $\frac{5\times3}{7\times3}$, division qui revient, comme nous l'avons dit plus haut,

à celle de 2×7 par 5×3, dont le quotient est $\frac{2 \times 7}{3 \times 5}$. Enfin, on peut encore mettre le dividende sous la forme $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{5}{7}$, ce qui revient en effet, à $\frac{2}{3}$; divisant ce produit par l'un de ses facteurs $\frac{5}{7}$, qui est le diviseur, on aura pour quotient l'autre facteur $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$, ou $\frac{2 \times 7}{3 \times 5}$, comme précédemment. En appliquant l'un ou l'autre de ces raisonnemens à deux fractions quelconques, on est conduit à cette règle :

On divise une fraction par une fraction, en multipliant la fraction-dividende par la fraction-diviseur inversée.

(74) Si l'on avait un entier joint à une fraction, à diviser par un entier joint à une fraction, on réduirait préliminairement chaque entier plus la fraction en une fraction.

(75) Nous avons promis (37 et 48) de déduire les règles de la multiplication et de la division des nombres décimaux de celles des fractions : c'est ce que nous allons faire.

Reprenons la multiplication, et considérons les trois cas : 1°... $0{,}371 \times 24$; 2°... $24 \times 0{,}371$; 3°... $0{,}371 \times 0{,}24$. Si l'on écrit ces fractions décimales sous forme de fractions ordinaires, on aura à effectuer les produits, 1°... $\frac{371}{1000} \times 24$; 2°... $24 \times \frac{371}{1000}$; 3°... $\frac{371}{1000} \times \frac{24}{100}$: conséquemment on est ramené *à opérer sur les facteurs comme s'ils étaient entiers, et à détacher vers la droite du produit autant de décimales qu'il y en a, en somme, dans les deux facteurs;* ce qui est la règle générale démontrée (35).

Passons à la division, et en supposant qu'elle se fasse exactement, considérons les cinq cas qu'elle présente, savoir : 1°... 17,28 à diviser par 12 : 2°... 1728 à diviser par 0,12 : 3°... 17,28 à diviser par 0,12 : 4°... 1,728 par 1,2 : 5°... 172,8 par 0,012. Ces divisions reviennent à celle-ci,

1°... $\frac{1728}{100}$ par 12 : 2°... 1728 par $\frac{12}{100}$; 3°... $\frac{1728}{100}$ par $\frac{12}{100}$; 4°... $\frac{1728}{1000}$ par $\frac{12}{10}$; 5°... $\frac{1728}{10}$ par $\frac{12}{1000}$, lesquelles donnent ces quotiens 1°... $\frac{1728}{12\times100}$ ou $\frac{1728}{12}\times\frac{1}{100}$; 2°... $\frac{1728\times100}{12}$, ou $\frac{1728}{12}\times100$; 3°... $\frac{1728\times100}{12\times100}$ ou $\frac{1728}{12}$; 4°... $\frac{1728\times10}{12\times1000}$, ou $\frac{1728}{12}\times\frac{1}{100}$; 5°... $\frac{1728\times1000}{12\times10}$, ou $\frac{1728}{12}\times 100$. Ces indications ramènent précisément aux règles établies (47), sous l'hypothèse où la division se ferait exactement.

Supposons maintenant que la division admette un reste, et considérons, dans cette hypothèse, les cinq cas qu'elle présente, savoir : 1°,..17,35 à diviser par 12; 2°...1735 par 0,12; 3°... 17,35 par 0,12; 4°... 1,735 par 1,2; 5°... 173,5 par 0,012. Ces divisions reviennent à celles-ci, 1°... $\frac{1735}{100}$ par 12; 2°... 1735 par $\frac{12}{100}$; 3°... $\frac{1735}{100}$ par $\frac{12}{100}$; 4°... $\frac{1735}{1000}$ par $\frac{12}{10}$; 5°... $\frac{1735}{10}$ par $\frac{12}{1000}$, auxquelles répondent ces quotiens, 1°... $\frac{1735}{12}\times\frac{1}{100}$, ou $1{,}44+\frac{0{,}07}{12}$; 2°... $\frac{173500}{12}$, ou $14458+\frac{4}{12}$, c'est-à-dire, $14458+\frac{0{,}04}{0{,}12}$; 3°... $\frac{1735}{12}$, ou $144+\frac{7}{12}$, ou $144+\frac{0{,}07}{0{,}12}$; 4°... $\frac{1735}{12}\times\frac{1}{100}$ ou $1{,}44+\frac{0{,}07}{12}$, ou $1{,}44+\frac{0{,}007}{1{,}2}$; 5°... $\frac{173500}{12}$, ou $14458+\frac{4}{12}$, ou $14458+\frac{0{,}004}{0{,}012}$. Ces quotiens et ces restes sont ceux que nous avons déjà obtenus (47) par une autre voie.

Des Fractions de Fractions.

(76) On donne au produit indiqué de plusieurs fractions le nom de *fraction de fraction*. Ainsi, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ signifie les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, et, en effet, le tiers de $\frac{4}{5}$ étant $\frac{4}{5\times3}$, le double

sera $\frac{4 \times 2}{5 \times 3}$. Prendre les $\frac{7}{9}$ de ce résultat, reviendrait à chercher les $\frac{7}{9}$ des $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, ou les $\frac{7}{9}$ de $\frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ qui sont $\frac{4 \times 2 \times 7}{5 \times 3 \times 9}$.

Problème I. *Trouver la moitié des deux tiers des trois quarts de 24 francs.*

Probl. II. *Trouver la moitié du tiers des cinq sixièmes de* $\frac{27}{5}$ *francs.*

Probl III. *Trois francs de France valent* 32 *deniers sterling d'Angleterre*, 240 *deniers sterling valent* 408 *deniers de gros de Hollande*, 50 *deniers de gros valent* 190 *maravedis d'Espagne; on demande combien* 90 *francs de France font de maravedis?*

Puisque 3 fr. de France valent 32 deniers sterling, 1 fr. vaudra $\frac{32}{3}$ deniers sterling.

Puisque 240 deniers sterling valent 408 deniers de gros, 1 denier sterling vaudra $\frac{408}{240}$ deniers de gros.

Puisqne 50 deniers de gros valent 190 maravedis, un denier de gros vaudra $\frac{190}{50}$ maravedis.

Donc le franc de France sera les $\frac{32}{3}$ des $\frac{408}{240}$ des $\frac{190}{50}$ du maravedis, c'est-à-dire, qu'on aura $\frac{32 \times 408 \times 190}{3 \times 240 \times 50}$ pour le rapport du franc an maravedis : multipliant ce rapport par 90, on trouve 6201 $\frac{3}{5}$ maravedis pour 90 fr. de France.

De la Réduction des Fractions à leur plus simple expression, et des Fractions continues.

(77) La propriété d'une fraction de conserver la même valeur lorsqn'on divise ses deux termes par un même nombre (60), fournit le moyen de remplacer dans les calculs une fraction dont les deux termes sont très-grands, par une fraction équivalente entre des termes plus petits.

Nous avons dit (68) qu'on appelle *nombre premier* celui

qui n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'unité. (*) Deux nombres sont dits *premiers entr'eux*, lorsqu'ils n'ont pas de commun diviseur : ainsi deux nombres sont nécessairement premiers entr'eux, lorsque chacun d'eux est premier : deux nombres peuvent cependant être premiers entr'eux, quoique chacun d'eux soit décomposable en facteurs : tels sont, par exemple, les nombres 6 et 35 dont le premier est divisible par 2 et par 3, et le second est divisible par 7 et par 5, et qui n'ont pas de commun diviseur.

Il résulte de ces notions, que lorsque les deux termes d'une fraction sont séparément des nombres premiers, ou lorsqu'ils sont des nombres premiers entr'eux, il n'y a pas lieu à exprimer la fraction plus simplement : une telle fraction est dite *irréductible*.

Dans le cas contraire, si on savait décomposer les deux termes de la fraction, en tous leurs facteurs nombres premiers, on simplifierait la fraction, en effaçant dans les deux termes les facteurs communs. Soit, par exemple, la fraction $\frac{6930}{9245}$: son numérateur étant le produit $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$, et son dénominateur le produit $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$, la proposée revient donc à $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11}$: effaçant dans les deux termes les facteurs communs 2, 5, 7, 7, 11, il reste $\frac{3}{2 \times 2}$ ou $\frac{3}{4}$ pour plus simple expression de la proposée.

Ce procédé revient évidemment à essayer la division des deux termes de la fraction successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., en commençant par les plus petits ; mais il peut arriver que le plus petit diviseur nombre premier, soit un assez grand nombre, ou qu'il soit le numérateur lui-même : dans ces

(*) Tous les nombres premiers sont nécessairement *impairs*, à l'exception du nombre 2.

deux cas, on peut être exposé à beaucoup d'essais inutiles. Cependant, lorsqu'on ne trouve pas un diviseur exact au-dessous de la plus grande moitié du numérateur, on doit conclure qu'un tel diviseur n'existe pas; car, puisqu'il doit diviser exactement le numérateur qui est le plus petit des deux termes, il ne peut excéder la moitié de ce numérateur, à moins qu'il ne soit le numérateur lui-même.

Lambert, et tout récemment l'astronome *Burkardt* ont donné des tables très-étendues de nombres premiers qui servent à la décomposition d'un nombre en ses facteurs nombres premiers. Nous en avons extrait la suivante qui s'étend de 1 à 500.

1	53	131	223	311	409
2	59	137	227	313	419
3	61	139	229	317	421
5	67	149	233	331	431
7	71	151	239	337	433
11	73	157	241	347	439
13	79	163	251	349	443
17	83	167	257	353	449
19	89	173	263	359	457
23	97	179	269	367	461
29	101	181	271	373	463
31	103	191	277	379	467
37	107	193	281	383	479
41	109	197	283	389	484
43	113	199	293	397	491
47	127	211	307	401	499

Étant donné le nombre 130351, on essaie de le diviser par les plus petits nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc., et on trouve que 13 est le plus petit diviseur exact, d'où on conclut 130351 égal à 13 × 10027 : on essaie la division du quotient 10027 par les nombres premiers consécutifs à 13, et on rencontre 37 pour diviseur exact; le quotient de

cette division étant 271, on a 130351 égal à $13 \times 37 \times 271$: or, 271 étant lui-même un nombre premier, comme l'indique la table, la décomposition en facteurs ne peut être poussée plus loin.

Proposons-nous de décomposer le nombre 360 en tous ses facteurs premiers et composés. On procède comme il suit :

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5

la division de 360 par 2 donne le quotient 180, qui, divisé par 2, donne le quotient 90, qui, divisé par 2, donne le quotient 45 qui n'est plus divisible par 2 : on essaie alors la division par 3 ; 45 divisé par 3 donne le quotient 15, qui, divisé par 3, donne le quotient 5 : 5 n'étant plus divisible par 3, mais par 5, on a le quotient 1 : l'opération s'arrête à ce terme, et on a 360 égal à

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

Il nous reste à trouver les facteurs composés donnés par l'opération suivante :

360	2
180	2, 4
90	2, 8
45	3, 6, 12, 24
15	3, 9, 18, 36, 72
5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Par le second quotient 2, on multiplie le quotient supérieur 2, ce qui donne 4 qu'on écrit sur la seconde ligne ; par le troisième quotient 2, on multiplie les nombres des deux premières lignes, savoir, 2 et 4 ; on rejette le produit 4 déjà obtenu, et on écrit 8 sur la troisième ligne ; par le diviseur 3 on multiplie tous les nombres supérieurs, c'est-à-dire, tous les diviseurs 2 et les produits 4 et 8, et on écrit sur la quatrième ligne tous les produits différens ainsi obtenus : et ainsi par

3 et par 5. De cette manière on forme tous les diviseurs composés de 360, qui sont au nombre de vingt. On voit que toute la difficulté consiste dans la recherche des diviseurs nombres premiers (*Algèbre*, 1.[re] *section*).

(78) Bientôt nous ferons connaître quelques propriétés des nombres considérés comme diviseurs, et qui trouvent leur application dans le problème actuel : cependant ces moyens laissent à désirer une méthode expéditive et sûre pour réduire, lorsqu'il y a lieu, une fraction à sa plus simple expression, c'est-à-dire, pour découvrir le plus grand nombre qui puisse en diviser, en même temps, les deux termes, puisqu'on obtient alors les deux plus petits quotiens possibles. Nous avons donc à résoudre ce problème.

Étant donnés deux nombres qu'on peut regarder comme les deux termes d'une fraction, trouver leur plus grand commun diviseur.

Pour abréger le discours, nous conviendrons de noter par ce signe $=$ qu'on prononce *égal à*, l'égalité entre une opération indiquée et le résultat de cette opération : ainsi, par exemple, $8 = 5 + 3$, $8 = 10 - 2$, $8 = 4 \times 2$, $8 = \frac{16}{2}$. Les deux parties de l'égalité séparées par le signe $=$, s'appellent *membres* de l'égalité : celui qui est à gauche du signe $=$, est dit *premier membre*, et celui qui est à la droite, est dit *second membre*.

Soient maintenant les deux nombres 637 et 143 entre lesquels il s'agit de trouver *le plus grand commun diviseur* : ce plus grand commun diviseur devant diviser les deux nombres, ne peut excéder le plus petit des deux ; mais il peut être ce plus petit nombre lui-même : il convient donc d'essayer si le nombre 143 qui se divise lui-même, divise aussi 637, auquel cas il serait le plus grand commun diviseur cherché : la division faite, on trouve le quotient 4 avec le reste 65, en sorte que (45, 8.°)

$$637 = 143 \times 4 + 65;$$

maintenant il est visible que tout diviseur commun à 637 et 143, doit diviser le reste 65 : car, comme il divise 143, il divisera 143 × 4 qui est une des parties de 637, il faut donc qu'il divise séparément l'autre partie 65 ; il résulte de là que le plus grand commun diviseur des nombres 637 et 143 doit l'être aussi des nombres 143 et 65 : en effet, si ces deux nombres 143 et 65 pouvaient admettre un diviseur commun qui fût plus grand que le plus grand commun diviseur entre 637 et 143, comme il diviserait d'abord 143 et conséquemment 143 × 4, ensuite 65, et conséquemment 143 × 4 + 65 = 637 ; il deviendrait donc diviseur commun de 637 et 143 : d'où resulterait cette conséquence absurde que 637 et 143 pourraient admettre un diviseur commun plus grand que leur plus grand commun diviseur : donc le plus grand commun diviseur des nombres 637 et 143, se transmet aux nombres 143 et 65.

On a donc à résoudre sur les nombres 143 et 65, exactement la même question que sur les nombres donnés, si ce n'est qu'elle est devenue plus facile, parce que les nombres sont devenus plus petits. Il est clair que le plus grand commun diviseur cherché ne peut excéder 65, puisqu'il doit diviser 143 et 65 ; il peut être 65 lui-même, ce qui aura lieu si 65 divise exactement 143 : en faisant cette division, on trouve le quotient 2 et le reste 13 ; donc 65 n'est pas le plus grand commun diviseur cherché, et on a

$$143 = 65 \times 2 + 13 :$$

en raisonnant sur cette égalité, comme on l'a fait sur la précédente, on conclura que le plus grand commun diviseur de 143 et 65, qu'on sait être le même que celui de 637 et 143, doit l'être de 65 et 13 ; donc il ne peut surpasser 13 : il faut donc essayer si 13 divise 65, ce qui arrive, puisqu'on a pour quotient 5 avec un reste zéro : ainsi 13 est le plus grand commun diviseur cherché.

Il ne sera pas inutile de faire remarquer qu'on a ramené la question proposée sur les nombres 637 et 143, à une question de même énoncé sur ces nombres successivement plus petits 143 et 65, 65 et 13, jusqu'à ce qu'enfin on ait obtenu un diviseur exact, lequel est le plus grand commun diviseur des deux nombres proposés.

Il est commode dans la pratique de faire les divisions successives à la suite l'une de l'autre, et d'adopter le dispositif suivant :

```
637 { 143 { 65 { 13
    {  4  { 2  { 5
reste. 65.....13.......0
```

Les raisonnemens faits sur les deux nombres précédens pouvant s'appliquer à deux nombres quelconques, nous en déduirons cette règle générale.

Pour obtenir le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divisera le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, le plus petit par le premier reste, le premier reste par le second reste, le second reste par le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu un quotient exact ou un reste nul : le dernier diviseur, c'est-à-dire, celui qui fait sa division exactement, est le plus grand commun diviseur cherché : si l'on divise les deux termes de la fraction proposée par ce plus grand commun diviseur, on a les deux plus petits quotiens possibles, et la fraction entre ces quotiens, est la plus simple expression de la proposée.

(79) Lorsque le dernier diviseur est l'unité, on conclut que la fraction proposée ne peut être réduite, c'est-à-dire, que ses deux termes sont premiers entr'eux : dans ce cas, cette fraction est dite *irréductible* (77).

(80) Lors même qu'on est conduit à une fraction irréductible et exprimée par de grands nombres, on peut encore la remplacer par une fraction exprimée plus simplement, qui, à la vérité, n'équivaut plus à la proposée,

mais qui, du moins, en est une approximation. La solution de cette question trouve naturellement place ici, puisqu'elle dépend encore de la recherche du plus grand commun diviseur.

Soit, par exemple, le nombre fractionnaire $\frac{1103}{887}$: on en extrait d'abord les entiers, en divisant le numérateur par le dénominateur (61), et on a

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{216}{887}$$

si l'on divise les deux termes de cette dernière fraction par 216, ce qui n'en change pas la valeur (60), on trouve 1 pour le nouveau numérateur, et $4 + \frac{23}{216}$ pour le nouveau dénominateur. On a donc

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{23}{216}}$$

Il faut concevoir la fraction $\frac{1}{4 + \frac{23}{216}}$ comme indiquant le quotient de 1 par l'entier 4 joint à la fraction $\frac{23}{216}$: si l'on divise les deux termes de $\frac{23}{216}$ par 23, on aura la fraction équivalente $\frac{1}{9 + \frac{9}{23}}$, en sorte que

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{9}{23}}}$$

si l'on divise par 9 les deux termes de la fraction $\frac{9}{23}$, on aura $\frac{9}{23} = \frac{1}{2 + \frac{5}{9}}$, et conséquemment

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{9}}}}:$$

si l'on divise par 5 les deux termes de la dernière fraction $\frac{5}{9}$, on aura $\frac{5}{9} = \cfrac{1}{1 + \frac{4}{5}}$, et conséquemment

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{4}{5}}}}}:$$

enfin, si l'on divise par 4 les deux termes de la dernière fraction, on trouvera

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}.$$

Observons qu'on a opéré sur les deux termes de la fraction $\frac{1103}{887}$, comme pour en trouver le plus grand commun diviseur, puisqu'on a divisé 1103 par 887, le dénominateur 887 par le reste 216 de la première division, ce reste 216 par le suivant 23, le reste 23 par le suivant 9, ce reste 9 par le suivant 5, ce reste 5 par 4, et enfin le reste 4 par le dernier reste 1 qui est le plus grand commun diviseur de 1103 et 887, et que les quotiens 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4 de ces divisions, sont l'entier 1 et les autres entiers joints aux fractions.

Le développement que nous venons de trouver, est dit *fraction continue*, ainsi nommée parce que le dénominateur est composé d'un entier plus une fraction, laquelle a encore pour dénominateur un entier plus une fraction, et ainsi de suite. Entr'autres propriétés curieu-

ses dont jouissent ces fractions et dont on trouvera la théorie complète dans les deux volumes d'algèbre, nous nous bornerons à démontrer la suivante qui n'est pas une des moins importantes, savoir, que si l'on prend à partir de l'origine de la fraction continue, les portions

(1.°) . . . 1

(2.°) . . . $1 + \frac{1}{4}$

(3.°) . . . $1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9}}$

(4.°) . . . $1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}}$

(5.°) . . . $1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}$

(6.°) . . . $1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}$

(7.°) . . . $1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}$

et qu'on les réduise en fractions ordinaires, comme on le verra plus bas, ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la fraction totale $\frac{103}{887}$.

Il est d'abord visible, quant à (1.°), que la partie entière 1 est plus petite que $\frac{103}{887}$.

Dans (2.°), le dénominateur 4 étant plus petit que le véritable dénominateur qui est le dénominateur total 4 + etc., c'est-à-dire, étant *trop petit*, (j'appelle trop petit tout dénominateur plus petit que le véritable), la fraction $\frac{1}{4}$ est *trop grande* (plus grande que la véritable) et conséquemment la somme $1 + \frac{1}{4}$ est plus grande que $\frac{103}{887}$, ou trop grande.

Dans (3.°), le dénominateur 9 est trop petit, donc la fraction $\frac{1}{9}$ est trop grande : donc le dénominateur $4 + \frac{1}{9}$ est trop grand : conséquemment la fraction $\frac{1}{4 + \frac{1}{9}}$ est trop petite, ainsi que la somme 1 + cette fraction ; par où il faut toujours entendre que cette somme est plus petite que $\frac{103}{887}$.

Dans (4.°), le dénominateur 2 est trop petit, la fraction $\frac{1}{2}$ trop grande, le dénominateur $9 + \frac{1}{2}$ trop grand, la fraction $\frac{1}{9 + \frac{1}{2}}$ trop petite, le dénominateur $4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}}$ trop petit, la fraction 1 divisée par ce dénominateur trop petit, est trop grande : conséquemment l'unité plus cette fraction trop grande, est une somme trop grande, c'est-à-dire, plus grande que $\frac{103}{887}$.

Ce raisonnement étant facile à continuer, nous laisserons au lecteur le soin de l'étendre aux portions suivantes.

Or, ces portions (1.°), (2.°), (3.°), (4.°), (5.°), (6.°)

et (7.°) peuvent être traduites en fractions ordinaires, comme on le voit ci-dessous,

(2.°) . . . . $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4};$

(3.°) . . . . $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9}}=1+\frac{9}{37}=\frac{46}{37};$

(4.°) . . . . $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{19}}=1+\frac{19}{78}=\frac{97}{78};$

(5.°) . . . . . . $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3}}};$

$$=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{28}}=1+\frac{28}{115}=\frac{143}{115};$$

(6.°) . . . $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$

$$=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{2}{5}}}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{5}{47}}=1+\frac{47}{193}=\frac{240}{193};$$

et si l'on compare (66) les fractions

$$\frac{5}{4},\quad \frac{46}{37},\quad \frac{97}{78},\quad \frac{143}{115},\quad \frac{240}{193},$$

avec la fraction totale $\frac{1103}{887}$, on reconnaît qu'elles sont, en effet, alternativement plus grandes et plus petites que

cette dernière. Cette propriété a fait appeller *convergentes* les fractions (1.°), (2.°), (3.°)....

Appliquons ce qui précède à la solution de quelques questions.

1.° Développons en fraction continue le rapport $\frac{100000}{314159}$ qui est celui du diamètre à la circonférence donnée par *Viete*. On a, d'après la règle (78), cette suite de divisions

314159	100000	14159	887	854	33	29	4	1
	3	7	15	1	25	1	7	4

si l'on observe que le numérateur est moindre que le dénominateur, on conclura qu'il n'y a pas d'entier, et qu'on a

$$\frac{100000}{314159}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}}$$

Il s'agit actuellement de calculer les fractions ordinaires qu'on nomme *convergentes*, et qui répondent aux portions

$$\frac{1}{3},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}},\quad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}},\ \text{etc.},$$

de la fraction continue totale. A cet effet, nous ferons connaître un procédé très-expéditif, dont on trouvera la démonstration dans le 1.er volume d'algèbre, et qui repose sur le dispositif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 7 & 15 & 1 & 25 & 1 & 7 & 4 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{7}{22}, & \frac{106}{333}, & \frac{113}{355}, & \frac{2931}{9208}, & \frac{3044}{9563}, & \frac{24239}{76149}, & \frac{100000}{314159}: \end{array}$$

on écrit d'abord la fraction $\frac{0}{1}$ qui ne fait partie des

fractions convergentes, et à la suite la fraction $\frac{1}{3}$ qui répond à la première portion de la fraction continue totale; au-dessus de cette seconde fraction $\frac{1}{3}$, on trouve écrit le second quotient 7; par ce quotient 7 on multiplie le numérateur, puis le dénominateur de la fraction $\frac{1}{3}$, au premier produit on ajoute le numérateur 0 de la fraction précédente, et au second produit, on ajoute le dénominateur 1 de la même fraction : on forme ainsi le numérateur et le dénominateur de la troisième fraction $\frac{7}{22}$. Au-dessus de cette troisième fraction, on trouve écrit le troisième quotient 15; multipliant le numérateur 7 par 15 et au produit ajoutant le numérateur 1 de la fraction précédente, on forme le numérateur 106 de la quatrième fraction; par ce même quotient 15, multipliant le dénominateur 22 et au produit ajoutant le dénominateur 3 de la fraction précédente, on forme le dénominateur 333 de la quatrième fraction. Au-dessus de celle-ci, on trouve écrit le quatrième quotient 1, et on a

$$\begin{aligned} 113 &= 1 \times 106 + 7 \\ 355 &= 1 \times 333 + 22. \end{aligned}$$

En suivant la même loi, on formera les deux termes des fractions convergentes consécutives, d'après ces égalités

$$\begin{aligned} 2931 &= 25 \times 113 + 106 \\ 9208 &= 25 \times 355 + 333 \\ 3044 &= 1 \times 2931 + 113 \\ 9563 &= 1 \times 9208 + 355 \\ 24239 &= 7 \times 3044 + 2931 \\ 76149 &= 7 \times 9563 + 9208 \\ 100000 &= 4 \times 24239 + 3044 \\ 314159 &= 4 \times 76149 + 9563: \end{aligned}$$

on observe que la dernière fraction n'est autre que la proposée.

On démontrera, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, que la première fraction $\frac{1}{3}$ est plus grande que la proposée, que la seconde fraction $\frac{7}{22}$ est plus petite que la proposée, ou qu'elle est trop petite, que la troisième fraction $\frac{106}{333}$ est trop grande, et ainsi de suite. Parmi toutes ces fractions convergentes, on emploie en géométrie celles-ci $\frac{7}{22}$, $\frac{113}{355}$ qui donnent deux rapports simples et approchés du diamètre à la circonférence.

2.° Le *mois synodique* ou le temps qui s'écoule d'une nouvelle lune à l'autre, est de $29^j\ 12^h\ 44'$, ou $42524'$; la durée de l'année tropique ou solaire, est, suivant M. *de la Caille*, $365^j\ 5^h\ 48'\ 49''$; nous prendrons $365^j\ 5^h\ 49'$ qui valent $525949'$: le rapport de l'une à l'autre, est $\frac{42524}{524959}$: en le réduisant en fraction continue, on trouve les quotiens 12, 2, 1, 2, 2, 21, d'où on conclura ces rapports rapprochés.

$$\frac{1}{12},\ \frac{2}{25},\ \frac{3}{37},\ \frac{8}{99},\ \frac{19}{235}.$$

L'erreur qui résulte du dernier substitué au rapport vrai, est, à-peu-près, de 1 sur cent mille : ainsi 235 mois synodiques sont à-peu-près égaux à 19 années solaires, de sorte que le commencement de la 20.e année sera aussi celui du 236.e mois. Telle est la période au bout de laquelle les nouvelles et les pleines lunes reviennent aux mêmes jours de l'année. Cette période, appelée vulgairement *cycle lunaire*, a été assignée par *Meton*, *astronome d'Athènes*, 450 années avant J.-C.

3.° Nous avons dit que l'année solaire est de $365^j\ 5^h\ 48'\ 49''$, et par conséquent plus longue de $5^h\ 48'\ 49''$ que l'année commune de 365^j : si cette différence était exacte-

ment de 6 heures, qui font le quart d'un jour, quatre années solaires excèderaient d'un jour quatre années communes, c'est-à-dire, qu'après quatre années communes ou civiles, le soleil ne serait pas encore revenu pour la quatrième fois au point du ciel où il était quatre années communes auparavant, il s'en faudrait d'un jour; en sorte qu'en ajoutant un jour à quatre années communes, on aurait quatre années solaires. On conçoit que suivant que cette différence serait $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, etc., d'un jour, il faudrait ajouter un jour à trois, à cinq, etc., années communes, pour les faire coïncider avec trois, cinq, etc., années solaires; que si cette différence était $\frac{7}{29}$ ou $\frac{8}{33}$, ou, etc., d'un jour, il faudrait à 29, à 33, etc., années communes, ajouter ou 7, ou 8, ou etc., jours pour en faire 29, ou 33, ou etc., années solaires. Si donc on cherche le rapport entre $5^h\ 48'\ 49''$ et 24^h, on aura par son numérateur le nombre de jours qu'il faudra ajouter à un nombre d'années, compté par son dénominateur, pour les convertir en années solaires ou tropiques. Ce rapport est $\frac{20929}{86400}$, en sorte qu'on peut dire qu'au bout de 86400 années, il faudrait intercaler 20929 jours pour les réduire à des années tropiques. Or, comme le rapport $\frac{20929}{86400}$ d'ailleurs irréductible, est exprimé en termes très-grands, on propose de trouver, en des termes plus petits, des rapports aussi approchés de celui-ci qu'il est possible. A cet effet, on réduira la fraction $\frac{20929}{86400}$ en fraction continue, et on aura les quotiens 4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15, d'après lesquels on formera, comme nous l'avons dit plus haut, les fractions convergentes qui expriment les portions successives de la fraction continue: on voit ci-dessous la série des fractions, et au-dessus de chacune d'elles le quotient par lequel on a multiplié son numérateur et son dénominateur pour avoir les produits qu'il faut augmenter du numérateur et du dénomi-

nateur de la fraction précédente, à l'effet de former les deux termes de la fraction qui suit la première :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 7 & 1 & 3 & 1 & 16 & 1 & 1 & 15 & \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{4} & \frac{7}{29} & \frac{8}{33} & \frac{31}{128} & \frac{39}{161} & \frac{655}{2704} & \frac{694}{2865} & \frac{1349}{5569} & \frac{20929}{86400} \end{array}$$

Les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{29}$, $\frac{8}{33}$, etc., montrent que l'intercalation la plus simple est celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui est le fondement du *calendrier Julien*; mais qu'on approcherait plus de l'exactitude, en n'intercalant que sept jours dans l'espace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'espace de trente-trois ans, et ainsi de suite. Comme à partir de la fraction $\frac{1}{4}$ inclusivement, les fractions ci-dessus sont alternativement plus grandes et plus petites que la fraction $\frac{20929}{86400}$, on doit conclure que l'intercalation d'un jour sur quatre ans, sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans, trop faible, et ainsi de suite. Dans la *réformation grégorienne*, on s'est servi de la détermination de l'année donnée par *Copernic*, laquelle est de $365^j\ 5^h\ 49'\ 20''$; en employant cet élément, on aurait, au lieu de la fraction $\frac{20929}{86400}$, celle-ci $\frac{20960}{86400}$ qui donnerait ces fractions convergentes

$$\frac{1}{4},\ \frac{8}{33},\ \frac{41}{169},\ \frac{131}{540}$$

qui sont, à l'exception des deux premières, assez différentes de celles que nous avons trouvées ci-dessus. Dans un écrit à part (*), j'ai traité cette question et la précédente avec toute l'étendue qu'exige leur importance, c'est-à-dire, sous le double point de vue historique et scientifique, et j'en ai déduit la formation d'un *calendrier perpétuel*. (Voyez aussi mon *Exposition du Système du Monde*.)

(*) Cet ouvrage se trouve chez *J.-N. Houdin*, imprimeur-libraire de l'Université.

(81) Nous avons promis (48) d'examiner ce que deviennent le quotient et le reste d'une division, lorsqu'on prend un multiple soit du dividende, soit du diviseur, soit enfin de ces deux nombres, en même temps.

Les démonstrations des théorèmes qui suivent, et qu'on peut passer dans une première lecture, sont fondées sur cette propriété évidente dont jouit l'égalité *de n'être pas altérée, soit qu'on augmente ou qu'on diminue ces deux membres* (78) *d'un même nombre, soit qu'on les multiplie ou qu'on les divise par un même nombre.* En effet, l'un des deux membres ne faisant que répéter l'autre, sous une autre forme, les résultats numériques dus à la même opération pratiquée sur l'un et l'autre membre, ne peuvent manquer d'être encore égaux.

Si l'on désigne un dividende par D, le diviseur par d, le quotient par q et le reste de la division par r, on sait (45) que

$$D = d \times q + r:$$

si l'on divise maintenant chacun des deux membres par le diviseur d, les deux quotiens resteront égaux, et on aura conséquemment l'égalité

$$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d} \; \ldots\ldots \; (1)$$

en observant 1.° que pour diviser le second membre par d, il faut diviser séparément par d chacune des deux parties $d \times q$, et r; 2.° que le produit $d \times q$ étant divisé par l'un de ses facteurs d, donne pour quotient l'autre facteur q; et que r, comme reste, étant moindre que d, la division de r par d, donne lieu à une fraction.

Supposons, en premier lieu, qu'on prenne le même multiple m du dividende et du diviseur : l'égalité (1) deviendra en y changeant D et d en mD et md,

$$\frac{mD}{md} = q + \frac{r}{d} \; \ldots\ldots \; (2)$$

et comme les premiers membres $\frac{D}{d}$, $\frac{mD}{md}$ des égalités (1)

et (2) sont absolument les mêmes (60), les seconds le sont aussi : d'où on conclut

Que si l'on prend le même multiple du dividende et du diviseur, le quotient q *et le reste* r *ne changent pas.*

Cette conclusion convient à une division exacte, puisque, pour ce cas, il ne faut que supprimer r, ou le terme $\frac{r}{d}$ dans les égalités (1) et (2).

On observera que m peut être une fraction telle que $\frac{1}{7}$, et qu'alors la conséquence précédente a encore lieu.

Supposons, en second lieu, qu'on multiplie par m les deux membres de l'égalité (1) : elle deviendra

$$\frac{mD}{d} = mq + \frac{mr}{d} \ldots\ldots (3)$$

en observant de multiplier séparément par m chacune des deux parties q et $\frac{r}{d}$ du second membre : mais quoique r soit moindre que d, il peut cependant arriver que mr soit plus grand que d, auquel cas mq serait augmenté de quelques unités.

Donc, *lorsque sans toucher au diviseur, on prend le multiple* m *d'un dividende, on peut avoir un multiple du quotient, plus grand que* m.

Par exemple, 7 divisé par 5, donne le quotient 1, et le reste 2 : et 6 × 7 ou 42 divisé par 5, donne le quotient 8 et le reste 2 : ce second quotient 8 est plus grand que 6 fois le premier quotient.

Lorsque m est une fraction telle que $\frac{1}{7}$, mr devient $\frac{r}{7}$, et comme r est moindre que d, le septième de r est, à plus forte raison, moindre que d : *on a donc un sous-multiple du quotient égal à celui qu'on a pris du dividende, si cependant on peut prendre ce sous-multiple, ce qui n'est pas toujours possible.* Ainsi, par exemple, 18 divisé par 5, donne

le quotient 3 avec le reste 3, et la moitié de 18, c'est-à-dire, 9 divisé par 5, donne le quotient 1 avec le reste 4 : le second quotient n'est pas la moitié du premier, parce que le premier quotient n'est pas divisible par 2 : mais le tiers de 18, c'est-à-dire, 6 divisé par 5, donne le quotient 1 avec le reste 1 : ici le quotient et le reste sont devenus tiers de ce qu'ils étaient dans la première division.

Lorsque la division se fait exactement, on a $r=o$, et l'égalité (3) devient

$$\frac{mD}{d} = mq :$$

Alors si m est un nombre entier, on a même multiple du quotient et du dividende ; lorsqu'au contraire m est fractionnaire, et, par exemple, $\frac{1}{7}$, il peut arriver que le quotient q ne soit pas divisible par 7. Par exemple, 63 divisé par 7, donne le quotient 9, et le septième de 63, c'est-à-dire, 9 divisé par 7, donne le quotient 1 avec le reste 2 : en effet, le second quotient n'est pas le septième du premier.

Si dans l'égalité (1), on divise de part et d'autre par m, ce qui revient à multiplier le diviseur d par m, sans toucher au dividende (*page* 79), on aura celle-ci

$$\frac{D}{md} = \frac{q}{m} + \frac{r}{md} \dots\dots (4)$$

D'où on conclut que, *lorsque sans toucher au dividende, on prend le multiple* m *du diviseur, on peut avoir le même sous-multiple* m *du quotient.*

Il peut cependant arriver que le quotient ne soit pas divisible exactement par m, et alors la conclusion précédente est en défaut. Si m est une fraction telle que $\frac{1}{7}$, l'égalité (4) devient

$$\frac{D}{\frac{1}{7}d} = 7q + \frac{7r}{d}$$

Comme $7r$ peut être plus grand que d, on peut avoir plus de 7 fois le quotient.

Ainsi, *lorsqu'on prend un sous-multiple* m *du diviseur avec le même dividende, on peut avoir un multiple du quotient plus grand que* m.

Lorsque la division se fait sans reste, le multiple du quotient correspond toujours au sous-multiple du diviseur.

De quelques propriétés des nombres considérés comme diviseurs.

(82) Les propriétés que nous allons démontrer servent, dans un grand nombre de cas, à réduire une fraction à sa plus simple expression, ou au moins, à opérer un commencement de réduction qu'on achève par la méthode du plus grand commun diviseur.

1.° Tout nombre est divisible par 2, lorsque le chiffre des unités est divisible par 2; tels sont les nombres 22, 134, 1538, etc. : en effet, quel que soit le nombre proposé, et dont le chiffre des unités est divisible par 2, lorsqu'on aura opéré la division de ses dixaines par 2, le reste ne pourra être que 0 ou 1 : en sorte qu'il restera à diviser par 2, l'un de ces nombres 0, 2, 4, 6, 8, dans le cas du reste 0, et l'un de ceux-ci 10, 12, 14, 16, 18, dans le cas du reste 1, divisions qui se font exactement. Autrement tout nombre étant décomposable en dixaines et en unités, comme une dixaine est divisible par 2, et qu'ainsi il en est de même d'un nombre quelconque de dixaines, la divisibilité du nombre par 2, dépendra de la divisibilité du chiffre des unités par 2.

Les nombres divisibles par 2, se nomment *nombres pairs*, parce qu'ils peuvent être partagés en deux parties pareilles ou égales; les nombres non divisibles par 2, sont dits *impairs*.

2.° On reconnaît qu'un nombre est exactement divisible par 3, à ce que la somme de ses chiffres considérés comme s'ils ne comptaient que des unités simples, est 3 ou un multiple de 3. Le nombre 35463 donnant pour somme de ses chiffres $3+5+4+6+3=21$, exactement divisible par 3, est lui-même exactement divisible par 3. Cette propriété du nombre 3 est la conséquence d'une propriété analogue du nombre 9, que nous démontrerons plus loin.

3.° Un nombre est divisible par 4, lorsque le nombre formé de ses dixaines et de ses unités, est divisible par 4; en effet, une centaine étant divisible par 4, un nombre quelconque de centaines est aussi divisible par 4; il suffit donc que la condition énoncée ait lieu. Le nombre $1428 = 1400 + 28$; or, de ce que 28 est divisible par 4, on conclut que 1428 l'est pareillement.

4.° Un nombre est exactement divisible par 5, lorsque son dernier chiffre est 0 ou 5: cette propriété est évidente, en observant que tout nombre de dixaines étant divisible par 5, la totalité du nombre sera divisible par 5, dans les hypothèses ci-dessus. Tout nombre terminé par un nombre quelconque de zéros, est divisible par le produit d'autant de facteurs 5, proposition qui nous servira bientôt.

5.° Un nombre pour être divisible par 6, doit l'être par 2×3, ou par 2, puis par 3: la divisibilité par 2 exige qu'il soit terminé par un chiffre pair: la divisibilité par 3 exige que la somme de ses chiffres soit 3 ou un multiple de 3.

6.° Quant au caractère de divisibilité par 7, nous nous bornerons à observer que les restes des divisions par 7 de ces nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc. étant 1, 3, 2, 6, 4, 5, puis 1, 3, 2, 6, 4, 5, et ainsi de suite *periodiquement*, un nombre sera ou ne sera pas divisible par 7, suivant que la somme faite des produits des chiffres de ses unités, dixaines, centaines, mille, dixaines de

mille, centaines de mille, etc., respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, etc. sera ou non divisible par 7. Dans ce dernier cas, le reste sera le même que celui de la division du nombre proposé par 7. Au reste, ce caractère sur lequel nous reviendrons dans l'algèbre, étant compliqué, il est plus simple d'essayer la division.

7.° Un nombre est exactement divisible par 8, lorsque ses centaines, ses dixaines et ses unités forment un nombre divisible par 8, et, en effet, un mille étant divisible par 8, un nombre quelconque de mille est pareillement divisible par 8. Des caractères de divisibilité par 2, 4, 8, on peut conclure que tout nombre terminé par un nombre quelconque de zéros, est exactement divisible par un produit formé du même nombre de facteurs 2, proposition sur laquelle nous reviendrons bientôt.

8.° Un nombre est divisible par 9, lorsque la somme de ses chiffres considérés comme comptant des unités simples, est 9 ou un multiple de 9.

En effet, les nombres

1 10 100 1000 10000, etc.

divisés par 9, laissent le reste 1; les doubles

2 20 200 2000 20000, etc.

divisés par 9, laissent le reste 2; les triples

3 30 300 3000 30000, etc.

divisés par 9, laissent le reste 3, et généralement le reste est toujours le chiffre significatif, pourvu cependant qu'à l'égard des nombres

9 90 900 9000 90000, etc.

on suppose un quotient plus petit d'une unité que le véritable, ce qui est permis, puisque le produit du diviseur par le quotient plus le reste, est toujours égal au dividende. Soit maintenant le nombre 235784: on peut le décomposer en 200000+30000+5000+700+80+4: et comme la division de chacune de ces parties separées par 9, laisse les restes 2, 3, 5, 7, 8, 4, il faudra ajouter

ces restes et diviser la somme par 9; cette division donnant le reste 2, on conclura que 235784 n'est pas divisible par 9; ainsi, sans passer par le quotient, on trouve le reste 2. A l'égard du nombre 235782, la somme des chiffres étant 27, qui est multiple de 9, on est assuré que la division par 9 doit s'effectuer exactement.

Les restes des divisions de ces nombres

1	10	100	1000	10000, etc.
2	20	200	2000	20000, etc.

etc.,

par 3, étant les mêmes que ceux des divisions par 9, en prenant convenablement les quotiens, la conclusion sera le caractère de divisibilité par 3 énoncé plus haut.

On a fondé sur cette propriété du nombre 9 des preuves de la multiplication et de la division que nous allons faire connaître, en renvoyant pour les démonstrations à la première section de l'algèbre. Qu'il s'agisse de vérifier le produit de 65498 par 454, lequel est 29736092: 1.° on ajoutera tous les chiffres du multiplicande comme s'ils ne comptaient que des unités simples, et divisant cette somme par 9, on aura le reste 5: 2.° on ajoutera tous les chiffres du multiplicateur, sous la même hypothèse, et divisant la somme par 9, on aura le reste 4: 3.° on multipliera les deux restes 5 et 4, et divisant le produit 20 par 9, on aura le reste 2; 4.° on ajoutera tous les chiffres du produit et divisant la somme par 9, on trouvera le reste 2, le même que le précédent. C'est de cette identité des restes qu'on conclut que le produit est exact. Mais pour qu'on puisse apprécier le mérite de cette preuve, nous observerons qu'on aurait encore eu de part et d'autre le même reste 2, en intervertissant à volonté l'ordre des chiffres du produit, et les écrivant, par exemple, en cette manière: 27 906 329, parce que la somme des chiffres restant la même dans les produits vrai et interverti, les restes de

la division par 9, doivent être les mêmes; ainsi la preuve serait en défaut dans cette circonstance: elle le serait encore s'il y avait des erreurs en moins dans quelques chiffres du produit, et des erreurs en plus dans quelques autres, de manière cependant qu'il y eût compensation. Mais si le produit est erroné de toute autre manière, la condition des restes égaux n'étant plus satisfaite, on est averti que le produit n'est pas exact. Quant à la division, après avoir retranché le reste final du dividende, la différence étant ou devant être l'exact produit du diviseur par le quotient, il y a lieu à appliquer la preuve précédente et à faire les mêmes observations. Il convient donc, pour plus de sûreté, de vérifier la multiplication par la division, et la division par la multiplication.



CHAPITRE VII.

Conversion des Fractions ordinaires en Fractions décimales, et réciproquement.

(83) La traduction des anciennes mesures en nouvelles et de celles-ci en anciennes, exige qu'on sache transformer une fraction ordinaire en fraction décimale, et réciproquement; d'une autre part, le quotient de la division de deux nombres entiers qui ne se fait pas exactement, n'est exact qu'à moins d'une unité (45, 8.°), approximation insuffisante dans un grand nombre de cas; à la vérité, on complète le quotient par une fraction ayant pour numérateur le reste final, et pour dénominateur le diviseur (61); mais cette fraction n'est, dans le fait, qu'une division encore indiquée, et qui, dans certains cas, donne lieu à un quotient terminé, ou qui s'énonce exactement en décimales, et dans d'autres, à un quotient qui ne s'arrête jamais dans la partie décimale, mais dont on peut ne retenir que le nombre suffisant de décimales. A cette occasion, nous observerons que l'approximation d'un résultat, est subordonnée à la grandeur ou au prix de l'unité principale et au nombre de fois qu'elle est répétée, et que, si l'on doit ultérieurement multiplier ou diviser le résultat qu'on cherche par un nombre entier, il faut pousser plus loin ou restreindre son degré d'approximation : le contraire aura lieu, si le facteur ou le diviseur est décimal.

Nous avons dit (61) que la valeur d'une fraction est le quotient de la division du numérateur par le dénominateur : ainsi la fraction $\frac{5}{8}$ indique la division de 5 par 8, à laquelle on peut substituer celle de 5,0 ; de 5,00 ; de 5,000 ; etc. par 8, divisions qui, comme on l'a démontré (47, 1.°), reviennent à celles de 50, de 500, de 5000, etc. par 8, en comptant le quotient en dixièmes, en centièmes, en millièmes, etc. Ainsi, par exemple, en divisant 5000 par 8, on obtient le quotient 625, d'où on conclut $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

Dans cet exemple, la division s'est terminée, et il en serait de même si l'on avait à évaluer les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{25}$, etc. ; mais si l'on opère de la même manière sur la fraction $\frac{1}{3}$ par exemple, et qu'à l'effet d'avoir sa valeur poussée jusqu'aux millièmes, on écrive trois zéros à la suite du numérateur, on aura à effectuer la division

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 333 \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

qui donne le quotient 333 qu'il faut compter en millièmes, en sorte que le quotient sera 0,333, à moins d'un millième d'unité près, et, en effet, le quotient entier étant plus grand que 333 et plus petit que 334, le quotient en millièmes sera plus grand que 0,333 et plus petit que 0,334 ; donc le quotient obtenu 0,333 ne diffère pas du véritable d'un millième d'unité. Si on n'eût ajouté qu'un ou deux zéros à la droite de l'unité, on eût obtenu 0,3 pour valeur de $\frac{1}{3}$, à moins d'un dixième d'unité, ou 0,33 pour valeur de la même fraction,

à moins d'un centième d'unité. Ces quotiens 0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; etc. approchent donc de plus en plus du véritable, puisque les différences ou erreurs sont successivement moindres que 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; etc.

Ainsi le quotient de 145 par 12 qui est 12, à moins d'une unité près, sera 12,08 à moins d'un centième d'unité, ou 12,083 à moins d'un millième d'unité, approximation qu'on obtient, en évaluant en décimales la fraction $\frac{1}{12}$ qui complète le quotient entier 12. Mais il sera plus simple d'écrire à la droite du dividende 145 un, deux, trois, etc. zéros, de diviser le dividende ainsi préparé par le diviseur, et enfin de détacher par une virgule vers la droite du quotient autant de décimales qu'on a écrit de zéros au dividende.

Généralement donc, *pour avoir le quotient exact à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, il faut écrire à la suite du dividende autant de zéros que le quotient doit avoir de décimales, ou qu'il y a d'unités dans l'ordre assigné, et détacher par une virgule vers la droite du quotient, pareil nombre de décimales.*

Qu'il s'agisse de convertir la fraction $\frac{1}{7}$ en fraction décimale: on pourra, conformément à la règle, écrire à la droite du dividende autant de zéros qu'on veut avoir de décimales au quotient, ou bien, ce qui vaut mieux, écrire d'abord un zéro à la droite du dividende pour faire la première division qui donne les dixièmes du quotient, puis un zéro à la droite de chaque reste à mesure qu'on l'obtient pour former les dividendes partiels successifs. On a donc ce dispositif :

```
10   { 7
 30  { 0,142857
  20
   60
    40
     50
      1.
```

On remarque que les cinq premières divisions ont donné les restes 3, 2, 6, 4, 5, et que la sixième a ramené le reste 1 qui donne lieu au dividende 10 le même que le premier: donc, à partir de la septième division, on doit retrouver dans le même ordre les chiffres du quotient précédemment obtenus, c'est-à-dire, 142857, et après cinq restes les mêmes que les précédens, retomber de nouveau sur le reste 1, et conséquemment sur le dividende 10 qui ramènera de nouveau les mêmes quotiens et les mêmes restes dans le même ordre, et ainsi de suite indéfiniment, puisque jamais on ne peut tomber sur le reste zéro.

Pour transformer la fraction $\frac{3}{11}$ en fraction décimale, on fera la division

$$\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \cline{2-2} 80 & 0{,}27\ 27\ 27 \text{ etc.} \\ 3 & \end{array}$$

Dans cet exemple, on retrouve continuellement les restes 3 et 8 qui ramènent toujours et dans le même ordre le nombre 27 au quotient.

Ce nombre qui se répète régulièrement et indéfiniment au quotient, est dit *période*, et la fraction décimale qui en est composée, est dite *périodique*.

Dans le premier exemple, on a eu pour restes tous les nombres entiers moindres que le diviseur; dans le second, on n'a trouvé que deux restes.

(84) Ainsi, parmi les fractions ordinaires, il en est qui conduisent à des fractions décimales terminées, et d'autres à des fractions décimales qui ne s'arrêtent jamais et qu'on nomme *infinies* et qui sont *périodiques*. Nous allons assigner les caractères auxquels on reconnaît, *a priori*, c'est-à-dire, indépendamment du fait, si la fraction décimale doit s'arrêter ou non.

D'après la règle pour convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, il faut écrire des zéros à la suite

du numérateur, ce qui revient à le multiplier successivement par 10, c'est-à-dire, à introduire les facteurs 2 et 5 autant de fois qu'on a ajouté de zéros : lors donc que le dénominateur n'est lui-même qu'un produit de facteurs 2, ou de facteurs 5, ou de facteurs 2 et 5, nécessairement ce dénominateur ou ce diviseur s'introduit en facteur du dividende ; conséquemment la division se fait exactement, et le quotient est terminé.

Généralement donc, *quel que soit le numérateur d'une fraction, la division s'arrêtera, ou le quotient décimal sera fini*, 1.° *lorsque le dénominateur ne sera composé que de facteurs* 2, *ou de facteurs* 5 ; 2.° *lorsqu'il ne sera composé que de facteurs* 2 *et* 5.

Soit la fraction $\frac{3}{16}$: comme le dénominateur est le produit $2 \times 2 \times 2 \times 2$, si on écrit quatre zéros à la droite du numérateur 3, on aura ce nouveau numérateur $3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$, c'est-à-dire, $3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, qui divisée par $2 \times 2 \times 2 \times 2$, donne le quotient $3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ égal à 1875 ; mais comme on a multiplié le dividende par 10000, il faut prendre le dix-millième de ce quotient, qui sera 0,1875, comme on le trouverait par la division effective.

Si le diviseur ne satisfait pas à l'une des conditions énoncées plus haut, la division ne se terminera jamais, et nous allons démontrer qu'alors la fraction décimale sera nécessairement *périodique* : en effet, comme chacun des restes est moindre que le diviseur, et comme d'ailleurs le nombre des restes différens entr'eux est, au plus, égal au diviseur moins l'unité, en observant qu'aucun de ces restes ne peut être nul, il faudra bien qu'après les avoir épuisés, on retombe sur l'un des précédens. A partir de cette époque, les dividendes précédens se reproduisant dans le même ordre, il en sera de même des chiffres du quotient : donc, etc.

(85) Passons à la question inverse, ou proposons-nous de revenir d'une fraction décimale périodique à la fraction ordinaire qui lui a donné naissance, et qu'on nomme *fraction génératrice.*

Si l'on convertit par le procédé connu les fractions $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, etc., en fractions décimales, on trouvera

$$\frac{1}{9} = 0,\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1, \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{99} = 0,\ 01\ \ 01\ \ 01\ \ 01\ \ 01\ \ 01, \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{999} = 0,\ 001\ \ 001\ \ 001\ \ 001\ \ 001\ \ 001, \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{9999} = 0,0001\ \ 0001\ \ 0001\ \ 0001\ \ 0001\ \ 0001, \text{ etc.}$$

etc.

Qu'il s'agisse maintenant d'assigner la fraction génératrice de la fraction décimale périodique 0,27 27 27, etc. : il est clair que si l'on fait la somme de vingt-sept fractions périodiques, telles que 0,01 01 01, etc., on aura pour résultat 0, 27 27 27, etc. : donc aussi, en prenant vingt-sept fois la fraction $\frac{1}{99}$, on aura $\frac{27}{99}$ pour fraction génératrice de 0, 27 27 27, etc. Soit, en second lieu, la fraction périodique 0, 234 234 234, etc. dont on demande la fraction génératrice : comme la période a trois chiffres, on partira de la fraction 0,001 001 001, etc. : la somme de 234 fractions telles que la précédente sera de 0,234 234, etc. ; donc 234 fois $\frac{1}{999}$, c'est-à-dire, $\frac{234}{999}$ sera la fraction génératrice cherchée.

En raisonnant de la même manière sur toute autre fraction périodique donnée, on conclura généralement que,

Pour repasser d'une fraction décimale périodique à la

fraction ordinaire qui lui a donné naissance, il faut diviser une période considérée comme un nombre entier, par un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans cette période, sans faire abstraction des zéros qui peuvent entrer dans la période : on réduit ensuite la fraction s'il y a lieu.

Ainsi, pour la fraction périodique 0,0023 0023 0023, etc. la *génératrice* serait $\frac{0023}{9999} = \frac{23}{9999}$.

(86) Cette règle suppose, bien entendu, que la période commence au chiffre des dixièmes; ce qui n'arrive pas toujours, ainsi qu'on le remarque dans la suivante

0,48 324 324 324, etc.

qui ne devient périodique qu'à la troisième place à droite de la virgule. Nous allons en chercher la fraction génératrice : la fraction donnée revient à la suivante :

$$0,48 + 0,00\ 324\ 324\ 324, \text{ etc.}$$
$$= \frac{48}{100} + \frac{0,324\ 324\ 324, \text{ etc.}}{100}$$
$$= \frac{48}{100} + \frac{324}{999} : 100\ (*) = \frac{48}{100} + \frac{324}{99900} = \frac{48 \times 999 + 324}{99900}$$

Ainsi, pour former la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale qui ne devient périodique qu'à plusieurs intervalles de la virgule, il faut considérer la partie étrangère à la période comme un nombre entier, la multiplier dans cette hypothèse, par un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans une période, à ce produit ajouter une période considérée comme nombre entier, et donner à cette somme un dénominateur formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans une période, qu'on fera suivre d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.

(*) Les deux points indiquent (46) que la fraction $\frac{324}{999}$ doit être divisée par 100.

La fraction ci-dessus devient, après les opérations effectuées,

$$\frac{48276}{99900}=\frac{48276}{999\times100}=\frac{24138}{999\times2\times25}=\frac{12069}{999\times25}=\frac{4023}{333\times25}=\frac{1341}{111\times25}$$

$$\frac{447}{37\times25}=\frac{447}{37\times5\times5}$$, plus simple expression de la proposée.

On remarquera que, puisqu'il n'y a pas de zéros à la suite du numérateur de la fraction immédiate $\frac{48276}{99900}$, on n'a pu supprimer dans les deux termes de cette fraction, à l'effet de la réduire, 1.° que des facteurs 2 seulement, ou des facteurs 5 seulement qui peuvent être communs au numérateur et au facteur 100 du dénominateur de la fraction immédiate; 2.° et en outre, que des facteurs nécessairement autres que ceux-là, communs au nouveau numérateur et au second facteur 999 du dénominateur. Mais comme les zéros à la suite des 9 au dénominateur de la fraction primitive, sont en même nombre que les chiffres non périodiques, il s'ensuit que si l'on décompose le dénominateur de la fraction réduite, en ses facteurs nombres premiers, le plus grand nombre de facteurs 2 ou 5 mis en évidence par cette décomposition, sera précisément le même que celui des chiffres non périodiques: en l'augmentant d'une unité, on a donc le rang du premier chiffre périodique (*).

Cependant il pourrait arriver que le produit du nombre non périodique, par le facteur composé de 9, étant

(*) Cette conclusion paraîtrait en défaut à l'égard de toute fraction dont le dénominateur est un produit des facteurs 2 ou 5, et qui donne lieu, ainsi qu'on le sait (84), à une fraction décimale terminée, et non périodique. Soit, par exemple, la fraction $\frac{3}{8}=0{,}375$: on conclurait du dénominateur $8=2\times2\times2$ que la partie étrangère à la periode, est composée de trois chiffres, et qu'ainsi la période ne commence qu'au quatrième rang, ce qui est vrai, en formant la période de zéros, c'est-à-dire, en écrivant la fraction sous la forme

0, 375 000 000, etc.

ajouté à une période, pour former le numérateur de la fraction ordinaire, donnât une somme terminée par un ou plusieurs zéros, circonstance qui paraîtrait mettre en défaut la conclusion précédente. Pour lever cette difficulté, on observera que les complémens à 10 des produits

$$\begin{array}{lcl} 1\times 9 & \text{sont} & 1\\ 2\times 9 & \ldots & 2\\ 3\times 9 & \ldots & 3\\ 4\times 9 & \ldots & 4\\ 5\times 9 & \ldots & 5\\ 6\times 9 & \ldots & 6\\ 7\times 9 & \ldots & 7\\ 8\times 9 & \ldots & 8\\ 9\times 9 & \ldots & 9 \end{array}$$

c'est-à-dire, les facteurs de 9, d'où on conclut que la somme en question, ne pourrait être terminée même par un seul zéro, qu'autant que le dernier chiffre de droite de la partie non périodique, qui est le facteur de 9, serait répété par le dernier chiffre de droite de la période, lequel serait un complément: dans ce cas, on aurait mal compté l'origine de la période: c'est ce qui arriverait à l'égard de la fraction

$$0{,}41\ 231\ 231\ 231, \text{ etc.}$$

en prenant pour période 231; puisqu'alors la fraction génératrice, conformément à la règle, serait $\frac{41\times 999+231}{99900}$ $=\frac{40959+231}{99900}=\frac{41190}{99900}=\frac{4119}{999\times 2\times 5}$ où le plus grand nombre de facteurs 2 ou 5, dans le dernier dénominateur, est 1, quoique cependant la partie non périodique 41 paraisse composée de deux chiffres; mais on observera que la véritable période est 123, d'ou il résulte que la partie non périodique est 4, laquelle n'est, en effet, composée que d'un seul chiffre. Ainsi le calcul avertit qu'on a mal pris l'origine périodique, et il redresse l'erreur sur le nombre des chiffres non périodiques. (*Voyez* le premier volume de l'algèbre, où on démontre plusieurs propriétés curieuses des quotiens et des restes.)



CHAPITRE VIII.

EXTRACTION DES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES.

Formation des carrés et Extraction des Racines carrées des nombres entiers.

(87) On appelle *carré* d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même.

Le nombre considéré par rapport à son carré, est dit *racine carrée.*

Ainsi le carré de 5 est 25, et 5 est la racine carrée de 25 : le carré de 7 est 49, et la racine carrée de 49 est 7.

Dans le carré d'un nombre, ce nombre est 2 fois facteur : c'est ce qui a fait nommer ce produit *seconde puissance.*

(88) Il y a lieu ici à deux questions : 1.° *étant donné un nombre, en former le carré* ou *la seconde puissance ;* 2.° *étant donné un carré, assigner sa racine carrée.*

La première question se résout évidemment par la multiplication : la solution de la seconde est fondée sur la combinaison des dixaines et des unités de la racine dans le carré.

Considérons d'abord la série des nombres entiers d'un seul chiffre, savoir :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

les carrés sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,

d'où on conclut que tout carré composé d'un ou de deux chiffres, a pour racine un nombre d'un seul chiffre, en observant que le plus petit carré composé de trois chiffres, qui est 100, a pour racine 10 qui a deux chiffres.

Tout nombre compris entre les carrés consécutifs 1 et 4, 4 et 9, 9 et 16, etc. a sa racine comprise entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre 3 et 4, etc.; ainsi, par exemple, la racine carrée de 72, est plus grande que 8, et plus petite que 9; elle est 8 plus une fraction qu'on ne peut assigner exactement (*Algèb.*), mais dont on peut approcher continuellement, comme on le verra bientôt.

Ces racines carrées qu'on ne peut assigner exactement, sont dites *sourdes*, *irrationnelles* ou *incommensurables*.

Passons aux nombres de plus d'un chiffre, et examinons de quelle manière les dixaines et les unités se combinent dans le carré. Soit le nombre 64 à élever au carré, ou à multiplier par lui-même : le produit se compose 1.° de celui de 4 par 4, c'est-à-dire, du carré de 4, ou du *carré des unités*; 2.° de celui de 6 par 4, ou du *produit des dixaines par les unités*; 3.° de celui de 4 par 6, ou du *produit des unités par les dixaines*; 4.° de celui de 6 par 6, ou du *carré des dixaines*.

Si l'on observe que le produit des dixaines par les unités est le même que celui des unités par les dixaines (32), on conclura que le carré d'un nombre de deux chiffres, se compose 1.° *du carré des dixaines*; 2.° *du double produit des dixaines par les unités*; 3.° *du carré des unités*.

Or, le carré des dixaines n'est autre chose que le carré du chiffre des dixaines suivi de deux zéros, et le double produit des dixaines par les unités, revient au double produit du chiffre des dixaines par celui des unités, suivi d'un zéro; en sorte qu'on peut regarder le chiffre des dixaines comme comptant des unités.

D'après la règle et l'observation précédentes, on fera le carré de 64, en disant 1.° le carré de 6 est 36, qui suivi

de deux zéros, donne 3600; 2.° le double produit de 6 par 4 est 48, qui suivi d'un zéro, donne 480; 5.° le carré de 4 est 16 : ajoutant ces trois termes, on a

$$\begin{array}{r} 3600 \\ +\ 486 \\ +\ \ 16 \\ \hline 4096 \end{array}$$

Il résulte de ce mode de composition du carré d'un nombre, que le carré du chiffre des dixaines ne peut faire partie des deux chiffres de droite du carré total, et que le double produit du chiffre des dixaines par celui des unités, ne peut faire partie du premier chiffre de droite du même carré.

Examinons, en second lieu, la composition du carré d'un nombre de trois chiffres, et supposons la racine 359 : ce nombre étant décomposable en 35 dixaines, plus 9 unités, son carré sera composé, suivant la règle ci-dessus, du carré de 35 dixaines, du double produit de 35 dixaines par 9 unités, et du carré de 9 unités : or, la première partie n'étant que le carré de 35 suivi de deux zéros, il s'ensuit que, si dans le carré total de 359, qui est 128881, on sépare deux chiffres à droite, la partie à gauche 1288 contiendra le carré de 35 : mais comme la racine 35 est encore composée de dixaines et d'unités, son carré renferme encore trois parties dont l'une qui est le carré de 3 ne peut faire partie de 88, et se trouve conséquemment dans 12. Si donc on divise le carré total en tranches de deux chiffres de droite vers gauche en cette manière : 12 | 88 | 81, la première tranche de gauche contiendra le carré du premier chiffre de gauche de la racine ; les deux premières tranches de gauche contiendront le carré des deux premiers chiffres de gauche de la même racine, et les trois tranches seront le carré de la racine totale.

Pour montrer la généralité de cette loi, supposons une racine de quatre chiffres, savoir, 2431 qui a pour

carré 5909761 : cette racine étant décomposable en 243 dixaines plus 1 unité, le carré de 243 sera dans la portion 59097 du carré total : décomposant 243 en 24 dixaines plus 3 unités, le carré de 24 sera dans la portion 590 du carré 59097 : décomposant de nouveau 24 en deux dixaines plus 4 unités, le carré de 2 sera dans la partie 5 de 590. D'où l'on conclut encore que si l'on divise le carré donné en cette manière : 5|90|97|61, le nombre des tranches sera précisément égal à celui des chiffres de la racine.

Ces notions bien entendues, nous procèderons à l'extraction de la racine carrée, en opérant d'abord sur un carré divisible en deux tranches, puisque c'est à ce cas que nous avons ramené tous les autres.

Soit donc le carré 2916 : comme il ne donne que deux tranches, on en conclut que sa racine ne comporte que deux chiffres dont l'un compte les dixaines et l'autre les unités : or, le carré du chiffre des dixaines, ne pouvant faire partie de la première tranche à droite, est, en totalité, dans 29 qui contient ou qui peut contenir en sus quelques centaines dues à la somme du double produit des dixaines par les unités et du carré des unités : ainsi le plus grand carré contenu dans 29, sera celui du chiffre des dixaines de la racine ; ce carré est 25 dont la racine est 5 : faisant le carré de 5 qu'on ôtera de 29, et à la droite du reste 4 abaissant la tranche 16, on aura 416 qui contient deux parties, savoir, le double produit des dixaines par les unités et le carré des unités : or, la première est un nombre de dixaines, lequel se trouve dans 41 qui renferme le double du chiffre des dixaines par celui des unités : divisant donc 41 par le double du chiffre des dixaines, c'est-à-dire, par 10, on aura pour quotient le chiffre des unités, et généralement parlant, un chiffre plus grand, parce que 41 pouvant encore renfermer quelques dixaines dues au carré des unités, on peut avoir un dividende trop grand à diviser par le véritable diviseur ; or, 41 divisé par 10

donne 4, chiffre des unités: pour vérifier ce chiffre 4 c'est-à-dire, pour reconnaître s'il n'est pas trop grand, on fera le double produit des dixaines de la racine par les unités et le carré des unités, et comme cette somme est 416, on en conclura que le chiffre 4 est bon, et que le nombre proposé est l'exact carré de 54.

Nous pouvons maintenant passer à l'extraction de la racine carrée d'un nombre, quelque grand qu'il soit, et par exemple, du nombre 5 90 97 61; nous dirons : sa racine est composée de dixaines comptées par N qui peut être un nombre de plusieurs chiffres, et d'unités comptées par un chiffre que nous noterons par *a*; en sorte que la racine carrée sera figurée par N*a*; mais le carré des dixaines, n'ayant pas d'unités d'un ordre inférieur aux centaines, le carré du nombre *absolu* N, est dans 5 90 97: ainsi l'extraction de la racine du plus grand carré contenu dans 5 90 97, fera connaître N. Or, 5 90 97 étant un nombre plus grand que 100, sa racine N est encore composée de dixaines comptées par N', et d'unités comptées par *b*, et le carré du nombre absolu N' sera dans 590: or, ce nombre étant encore supérieur à 100, sa racine N sera composée de dixaines en nombre N'', et d'unités représentées par *c*; mais le carré du nombre N'' considéré absolument, étant dans 5, ce nombre N'' n'a qu'un chiffre *d*: ainsi, par l'extraction de la racine du plus grand carré contenu dans 5, on connaîtra le chiffre *d* de la racine totale; par celle du plus grand carré contenu dans 5 90, on connaîtra la partie *dc* de la racine; par celle du plus grand carré contenu dans 5 90 97, on connaîtra la partie *dcb*; et il restera à trouver le chiffre *a* des unités. Avant d'en venir aux détails de l'opération, on observera que ces chiffres *dcba*, comptent les mille, les centaines, les dixaines et les unités de la racine totale, qu'on les obtient dans le sens de gauche à droite, à la manière des chiffres d'un quotient, et qu'enfin

l'extraction de la racine du nombre 5 90 97 61 est successivement ramenée à une opération semblable sur 5 90 97, sur 5 90 et enfin sur 5 : cette réduction successive de l'opération est très-importante.

Venons aux détails de l'opération. Le plus grand carré contenu dans 5, est 4 dont la racine 2 est représentée par d ou N″ : le carré de 2, c'est-à-dire, 4 retranché de 5, donne le reste 1, à la droite duquel on abaisse 90, ce qui donne 190 dont la partie 19, divisée par 4, donne 4 pour c ; ainsi 24 ou N′ est la racine du plus grand carré contenu dans 590, le reste qu'on sait trouver d'après ce qui précède, est 14 : à sa droite abaissant 97, on aura 1497 ; mais si l'on observe que de 5 90 97 qui renferme le carré de N′b, on vient d'ôter le carré de N′, formé du carré du nombre absolu N′, suivi de deux zéros, on reconnaîtra que le reste 14 97 contient le double des dixaines N′ ou de 24 dixaines par b, et, en sus, le carré de b, et que comme la prémière de ces deux parties n'est autre chose que le double de 24 multiplié par b, ce produit étant suivi d'un zéro, il suffira pour découvrir b, de diviser la partie 149 du reste par 2×24, ou par 48 : le quotient 3 est donc b ; pour vérifier ce chiffre b, et d'ailleurs pour continuer l'opération, on fera le double produit de 24 par 3, suivi d'un zéro, et le carré de 3, ce qui complète le carré de N : cette somme retranchée de 14 97, donne le reste 48 à la droite duquel on abaissera 61 ; ce qui fera 48 61. Nous avons donc la partie N ou 243 de la racine totale dont il reste à découvrir le chiffre a des unités : mais puisque nous avons retranché le carré de la portion N′b, ou de la portion N de la racine totale Na, nécessairement le reste 4861 ne contiendra plus que le double produit de N ou de 243 par a, produit compté en dixaines, et le carré des unités en nombre a : si donc on divise la partie du reste, qui compte les dixaines, c'est-à-dire, 486 par 2×243, on aura le quotient 1 pour a : or, 2×243 suivi d'un

zéro est 4860, le carré de 1 est 1 ; la somme 4861 retranchée de 4861 donne le reste 0.

On voit ici le dispositif de l'opération :

carré... 5|9 0|9 7|6 1	2431
1 9.0	44
1 4 9.7	483
4 8 6.1	4861
4 8 6 1	

Le carré est partagé en tranches de deux chiffres, pour rappeler que la première tranche de gauche contient le carré du premier chiffre de gauche de la racine ; que les deux, les trois, les quatre tranches de gauche du carré contiennent les carrés des deux, des trois, et enfin des quatre chiffres de la racine pris de gauche à droite. Les points, qui dans les nombres 190 ; 1497 ; 4861, séparent le chiffre des unités, indiquent qu'on ne divise par le double de la portion déjà connue de la racine, que les parties 19 ; 149 ; 486 de ces restes, et on observera que les quotiens qui résultent de ces divisions pourraient être trop grands, puisqu'à chaque fois, on divise un nombre plus grand que le vrai produit, par l'un de ses facteurs, savoir, le double de la portion déjà connue de la racine : mais comme on recompose ensuite les deux parties dont la somme est contenue dans chacun de ces restes, on reconnaîtra que le quotient est trop grand, lorsque cette somme excèdera le reste. Enfin, à la droite des doubles 4, 48, 486 du premier, des deux, des trois premiers chiffres de la racine, qui sont les diviseurs de 19, de 149 de 486, nous avons écrit les quotiens 4, 3, 1, parce qu'en multipliant 44 par 4, 483 par 3, 4861 par 1, nous composons par une seule opération le double de la première partie de la racine par la seconde, plus le carré de la seconde.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un carré parfait, la méthode ne donne que la racine du plus grand carré

contenu dans ce nombre, et elle la donne à moins d'une unité près. Le reste ajouté au carré de la racine trouvée, rend le nombre proposé.

Lorsque le reste final, est égal au double de la racine obtenue, augmenté d'une unité, on doit conclure que la racine est trop petite, au moins, d'une unité : alors il faut augmenter le chiffre des unités, successivement d'une unité jusqu'à ce que le reste final devienne moindre que la somme ci-dessus. (*Algèb.* 1.re *sect.*)

Il est visible que l'extraction de la racine carrée revient à une division dans laquelle le quotient est égal au diviseur, en sorte qu'on découvre à-la-fois le diviseur et le quotient.

On s'exercera sur les nombres 1461681, 1849774081 dont les racines carrées ont un et deux zéros parmi leurs chiffres : dans le premier cas, on abaisse deux tranches de suite ; dans le second, on en abaisse trois.

(89) Le carré du produit de deux facteurs, est, d'après la définition (87), le produit des carrés de ces facteurs : réciproquement donc, la racine carrée du produit de deux facteurs, est le produit des racines de ces facteurs ; proposition qui s'étend, ainsi que sa réciproque, au produit d'un nombre quelconque de facteurs. Ainsi, lorsqu'on aura à chercher la racine carrée d'un nombre terminé par des zéros, en nombre pair, on fera abstraction de ces zéros, on extraira la racine du nombre, et à sa droite on écrira la moitié du nombre des zéros qui terminent le carré. Ainsi, par exemple, le nombre 1440000 étant 144×10000, sa racine sera 12×100, c'est-à-dire, 1200.

Composition des Cubes, et Extraction des Racines cubiques des Nombres entiers.

(90) On appelle *cube* d'un nombre le produit d'un nombre trois fois facteur, ou multiplié deux fois de suite

par lui-même : le cube est donc le produit du carré par le nombre. Le cube d'un nombre est encore dit *troisième puissance*.

On appelle *racine cubique* le nombre qui, pris trois fois en facteur, ou qui multiplié deux fois par lui-même, a donné le cube.

Les nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

ont pour cubes

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Ainsi, tout cube d'un, de deux ou de trois chiffres, n'aura qu'un chiffre à sa racine cubique, en observant que 1000, qui est le plus petit cube de quatre chiffres, a deux chiffres à sa racine cubique.

Il y a lieu à deux questions : 1.° *étant donné un nombre, en former le cube ;* 2.° *étant donné un cube, assigner sa racine cubique.*

La première de ces deux questions se résout par la multiplication ; mais notre objet est sur-tout de rechercher de quelle manière les parties de la racine se combinent dans le cube. Comme on forme le cube, en multipliant le carré par la racine, nous rappellerons que le carré est formé, 1.° du carré des dixaines ; 2.° du double produit des dixaines par les unités ; 3.° du carré des unités : en sorte qu'il faut multiplier ces trois parties par les dixaines et les unités du nombre.

1.° Le carré des dixaines, 2.° Deux fois le produit des dixaines par les unités, 3.° Le carré des unités,	étant multiplié par les dixaines, donnera	1.° Le cube des dixaines. 2.° Deux fois le produit du carré des dixaines par les unités. 3.° Le produit des dixaines par le carré des unités.
1.° Le carré des dixaines, 2.° Deux fois le produit des dixaines par les unités, 3.° Le carré des unités,	étant multiplié par les unités, donnera	1.° Le produit du carré des dixaines par les unités. 2.° Deux fois le produit des dixaines par le carré des unités. 3.° Le cube des unités.

On remarque que le produit du carré des dixaines par les unités, est répété d'abord deux fois, et ensuite une fois, ce qui donne trois fois ce produit, et que le produit des dixaines par le carré des unités, est répété d'abord une fois et ensuite deux fois, ce qui donne trois fois ce produit:

D'où on conclut que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient quatre parties; savoir: 1.° *le cube des dixaines;* 2.° *trois fois le carré des dixaines multiplié par les unités;* 3.° *trois fois les dixaines par le carré des unités;* 4.° *le cube des unités.*

Or, 1.° le cube des dixaines n'est autre chose que le cube du chiffre qui compte les dixaines, suivi de trois zéros; 2.° trois fois le carré des dixaines par les unités, revient au triple produit du carré du chiffre qui compte les dixaines par celui des unités, ce produit étant suivi de deux zéros; 3.° trois fois les dixaines multipliées par le carré des unités, revient à trois fois le produit du chiffre qui compte les dixaines par le carré des unités, ce produit étant suivi d'un zéro.

Ainsi, le cube de 46 est composé 1.° du cube de 4, c'est-à-dire, de 64, suivi de trois zéros; 2.° de $3 \times 16 \times 6$, ou de 288 suivi de deux zéros; 3.° de $3 \times 4 \times 36$ ou de 432 suivi d'un zéro; 4.° du cube de 6, qui est 216 : on a donc

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 28800 \\ 4320 \\ 216 \\ \hline 97336. \end{array}$$

Il résulte de ce mode de composition d'un cube, que le cube du chiffre des dixaines de la racine, ne peut faire partie des trois premiers chiffres de droite du cube total, et que le triple produit de trois fois le carré du chiffre des dixaines par les unités, ne peut faire partie des deux premiers chiffres de droite du même cube.

Examinons successivement la composition du cube d'un nombre de trois, quatre, etc., chiffres.

Soit le nombre 359 à élever au cube : cette racine étant décomposée en 35 dixaines plus 9 unités, le cube 46268279 sera composé, suivant la règle précédente, de quatre parties : or, le cube de 35 dixaines étant celui de 35, suivi de trois zéros, sera dans la portion 46268 du cube total : mais 46268 renfermant le cube de 35, sera composé de quatre parties dont l'une qui est le cube de 3, ne peut faire partie des trois premiers chiffres de droite, et se trouve conséquemment dans 46. Si donc on divise le cube 46268279 en tranches de trois chiffres, en allant de droite vers gauche, en cette manière : 46 | 268 | 279, la première tranche de gauche contiendra le cube du premier chiffre de gauche de la racine ; les deux premières tranches de gauche du cube contiendront le cube des deux premiers chiffres de gauche de la racine ; et enfin les trois tranches seront le cube de la racine totale.

Si l'on prend la racine 2431 qui a pour cube 14366528991, et qu'on la suppose décomposée en 243 dixaines plus 1 unité, on conclura que le cube de 243 est dans 14366528 ; si l'on décompose 243 en 24 dixaines plus 3 unités, le cube de 24 sera dans 14366, et enfin décomposant 24 en 2 dixaines, plus 4 unités, le cube de 2 sera dans 14.

Ainsi le nombre des chiffres de la racine cubique d'un nombre, est précisement égal au nombre des tranches de trois chiffres dans lesquelles on peut partager le cube donné, la dernière tranche à gauche pouvant être complète ou incomplète.

Nous pouvons maintenant procéder à l'extraction de la racine cubique, en commençant par un cube dont la racine n'ait que deux chiffres.

Soit, à cet effet, le nombre 13824 dont on propose d'assigner la racine cubique : comme ce nombre ne comporte que deux tranches, sa racine ne peut avoir que

deux chiffres, l'un de dixaines et l'autre d'unités : or, le cube du chiffre des dixaines, ne pouvant faire partie de 824, est tout entier dans 13 qui contient ou qui peut contenir, en sus, quelques mille dus à la somme des trois autres parties : or, le plus grand cube exact contenu dans 13, sera celui du chiffre des dixaines de la racine : ce plus grand cube est 8 dont la racine cubique est 2 ; le cube de 2 est 8 qui retranché de 13 donne le reste 5, à la droite duquel il faut abaisser la tranche 824, ce qui donne 5824 reste du cube total, soustraction faite du cube des dixaines. Des trois parties que contient encore ce reste, et qui sont 1.° le triple carré des dixaines par les unités ; 2.° le triple des dixaines par le carré des unités ; 3.° le cube des unités, la première est la seule propre à faire découvrir le chiffre des unités de la racine : en effet, comme elle revient au triple carré du chiffre des dixaines par celui des unités, suivies de deux zéros, il s'ensuit qu'en divisant la partie 58 par le triple carré du chiffre connu des dixaines, c'est-à-dire, par 12, on aura pour quotient le chiffre inconnu des unités, ou généralement un chiffre plus fort, parce qu'à raison des retenues, 58 peut être un dividende trop grand qu'on divise par le véritable diviseur ; le quotient est 4 : pour le vérifier, on recomposera, à l'aide des dixaines et des unités connues, les trois parties de la racine contenues dans 5824, et on retranchera la somme de 5824 : de ce que le reste est nul, il faudra conclure que le chiffre 4 est exact, et que le nombre donné est le cube parfait de 24.

Proposons-nous, en second lieu, de revenir du cube 46268279 à sa racine cubique qu'on sait être 359 : après avoir divisé le nombre en tranches de trois chiffres de droite à gauche, on a reconnu que les deux tranches de gauche, savoir 46268, renferment le carré formé des centaines et des dixaines de la racine, ce nombre étant considéré comme comptant des unités ; opérant donc sur le

nombre 46268 comme on vient de le faire sur un cube dont la racine a deux chiffres, on trouve la racine 35 et le reste 3393 : abaissant à la droite de ce reste la dernière tranche 279, on a le nombre 3393279 qui contient le triple carré de 35 dixaines par le chiffre inconnu des unités, le triple produit de 35 dixaines par le carré de ce chiffre, et enfin le cube des unités: mais la première de ces trois parties, comptant des centaines, ne peut se trouver que dans 33932: divisant donc ce nombre par 3 fois le carré de 35, c'est-à-dire, par 3675, on a pour quotient 9: connaissant maintenant les dixaines et les unités de la racine, on peut composer les trois parties dont nous venons de parler, et dont la somme ne doit pas excéder 3393279: comme il arrive que cette somme est égale à 3393279, on conclut que le chiffre des unités n'est pas trop fort, et que le nombre donné est le cube exact de 359, comme on le savait d'avance.

Nous nous bornerons à indiquer la série d'opérations à effectuer pour obtenir la racine cubique du nombre 479313355976 : ce nombre offrant quatre tranches, la racine cubique comporte quatre chiffres : le cube du chiffre des mille, est dans la première tranche à gauche 479 ; extrayant donc la racine cubique du plus grand cube contenu dans 479, on aura le chiffre 7 des mille de la racine: on fera le cube de ce chiffre, qu'on retranchera de 479, et à la droite du reste 136, on écrira la tranche suivante, qui est 313 : séparant dans ce nombre 136313 les deux chiffres de droite, la partie à gauche 1363 contiendra le triple carré du chiffre des mille par le chiffre inconnu des centaines de la racine : divisant donc 1363 par 3 fois le carré de 7, c'est-à-dire, par 147, on aura pour quotient le chiffre 8 des centaines, qu'il faudra vérifier, ce qu'on fera, en composant au moyen du chiffre des mille et de celui des centaines, trois fois le carré du premier chiffre par le second, suivi de deux zéros, trois fois le

premier par le carré du second, suivi d'un zéro, et le cube du second, somme qui doit être moindre que 136313 : la soustraction faite, on abaissera à la droite du reste 4761 la troisième tranche 355, ce qui donnera le nombre 4761355 dont la partie qui compte les centaines, savoir 47613, doit contenir le triple carré de 78 par le troisième chiffre de la racine qui est celui des dixaines: en divisant 47613 par trois fois le carré de 78 qui est 18252, on obtient le quotient 2 : faisant trois fois le carré de 78 par 2 suivi de deux zéros, trois fois 78 par le carré de 2 suivi d'un zéro, le cube 2, et retranchant cette somme de 4761355, on aura le reste 1101587 à la droite duquel il faut écrire la dernière tranche 976, ce qui donnera 1101587976 dont la partie à gauche des deux premières places, c'est-à-dire, 11015879 divisé par le triple carré de 782 qui est 1834572, donne pour quotient le chiffre 6 des unités de la racine : faisant le triple carré de 782 dixaines par 6, le triple produit de 782 dixaines par le carré de 6 et le cube de 6, et retranchant cette somme de 1101587976, on a le reste 0; en sorte que le nombre proposé est le cube exact de 7826.

Dans ces opérations, on n'a eu à extraire que la racine cubique de la dernière tranche à gauche qui comporte, au plus, trois chiffres, extraction qui fait connaître le chiffre des plus hautes unités de la racine : les chiffres suivans sont donnés par des divisions.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube exact, on n'extrait par le procédé actuel que la racine du plus grand cube contenu dans ce nombre, et on a un reste. Lorsque ce reste final est plus grand ou même égal à trois fois le carré de la racine trouvée, plus trois fois cette racine, plus l'unité, on conclut que la racine obtenue est trop petite, ou plutôt que le chiffre de ses unités est trop petit, et qu'il faut l'augmenter. (*Voyez l'Algèbre.*)

Des Racines carrées et cubiques approchées des nombres entiers, fractionnaires et décimaux.

(91) Lorsque le nombre proposé n'est pas un carré ou un cube exact, les méthodes précédentes donnent la racine carrée ou cubique, à moins d'une unité, puisque cette racine augmentée d'une unité, serait trop grande : nous nous proposons, dans ce titre, de rechercher ces racines à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, etc. d'unité près.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'extraire, à moins d'un dixième, la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré exact : on sait déjà (89) qu'en multipliant un carré par 100, on ne fait que multiplier la racine par 10; ainsi on doit la diviser par 10, et comme par là on divise par 10 l'erreur qui n'était pas d'une unité, on a une racine exacte, à moins d'un dixième. Pour avoir la racine à moins d'un centième, on multipliera le nombre proposé par le carré de 100, ou par 10000.

Donc, en général, *il faut écrire à la suite du nombre dont on doit extraire la racine carrée, un nombre de zéros double de celui des décimales qu'on veut avoir à cette racine.*

Pour avoir la racine cubique d'un nombre entier, à moins d'un dixième, d'un centième, etc. d'unité près, il faut multiplier le nombre par le cube de 10, par le cube de 100, etc., et diviser ensuite la racine cubique par 10, par 100, etc.

Donc, en général, *il faut écrire à la suite du nombre donné comme cube, un nombre de zéros triple de celui des décimales qu'on veut avoir à la racine cubique.*

De ce qu'un produit a autant de décimales qu'il y en a en somme dans les deux facteurs (35), il s'ensuit que, pour extraire la racine carrée ou cubique d'une fraction décimale, il faut préparer la fraction donnée de manière

que le nombre de ses décimales soit double dans le premier cas, et triple dans le second, de celui des décimales requises à la racine; puis faisant abstraction de la virgule, on extrait, d'après les règles précédentes, la racine soit carrée soit cubique, à la droite de laquelle on détache, par une virgule, la moitié ou le tiers du nombre des figures décimales qui se trouvaient dans le carré ou dans le cube, avant la suppression de la virgule.

Que l'on demande, par exemple, la racine carrée de 1,897 avec quatre décimales: il faudra ajouter cinq zéros à la suite de la fraction proposée qui deviendra 1,89700000: on trouvera pour racine 1,4096. La racine de 0,3 avec cinq décimales, est 0,54772.

Considérons, en dernier lieu, les fractions ordinaires: il résulte de la règle donnée (71) pour la multiplication des fractions, que le carré d'une fraction est une fraction entre le carré de son numérateur et celui de son dénominateur, et que le cube d'une fraction est une fraction entre le cube du numérateur et celui du dénominateur: d'où il suit réciproquement que

Pour extraire la racine ou carrée ou cubique d'une fraction, il faut extraire séparément la racine demandée de chacun de ses deux termes.

L'application de cette règle suppose que les deux termes soient des carrés ou des cubes, ce qu'on ne reconnaît que par le fait. Dans le cas contraire, on cherche à rendre le dénominateur un carré ou un cube, ce qu'on fait en multipliant les deux termes par le dénominateur ou par son carré: cette préparation est nécessaire pour connaître l'espèce de l'unité fractionnaire. Autrement, comme on n'aurait qu'un dénominateur approché, on ne pourrait dire quelle est l'unité de la fraction racine: mais le numérateur est alors approché.

Qu'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, à moins d'un dixième:

on multipliera le numérateur par 100, ce qui donnera 200, dont la racine carrée est 14, à moins d'une unité : en la divisant par 10, on aura 1,4, et pour la racine cherchée $\frac{1,4}{3} = \frac{14}{30}$, racine exacte, à moins du tiers d'un dixième, ou, à moins d'un trentième, puisque l'erreur qui n'est pas d'un dixième sur le numérateur, se trouve divisée par 3. En effet, cette racine augmentée de $\frac{1}{30}$, est $\frac{15}{30}$ dont le carré $\frac{225}{900} = \frac{2,25}{9}$ est plus grand que $\frac{2}{9}$.

Mais lorsque les deux termes ne sont pas des carrés ou des cubes parfaits, il est plus expéditif de réduire la proposée en une fraction décimale dont le nombre des décimales soit double ou triple de celui qu'on veut avoir à la racine (83), et alors on opère comme on la dit ci-dessus.

Qu'on demande la racine carrée de $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ avec quatre décimales : celle de 6 avec quatre décimales, est 2,4495 qui divisé par 3, donne 0,8165. Autrement la fraction $\frac{2}{3}$ est 0, 6666, etc. : extrayant la racine carrée suivant la règle ci-dessus, on retombe sur le même résultat.

(92) Pour dire qu'un nombre est plusieurs fois facteur, on écrit au-dessus et à droite de ce nombre, un chiffre qui compte le nombre de fois qu'il est facteur. D'après cette convention $2 \times 2 = 2^2$, $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$, etc. : ces chiffres supérieurs 2, 3, 4, etc., se nomment *exposans;* ils sont les indices de la puissance du nombre qui est au-dessous : réciproquement, ce nombre est une racine carrée par rapport au nombre facteur 2 fois, racine cubique, ou quatrième, ou cinquième, etc., par rapport au nombre 3, 4, 5, etc., fois facteur.

La théorie des logarithmes qu'on trouvera plus loin, offre des moyens beaucoup plus rapides et non moins sûrs d'obtenir les racines carrées, cubiques et même les racines supérieures avec toute l'approximation désirable.



CHAPITRE IX.

Des Proportions dites arithmétiques et géométriques : autrement, des équi-différences et des équi-quotiens.

(93) On distingue deux sortes de *proportions*, improprement nommées l'une *arithmétique*, l'autre *géométrique*, puisqu'elles peuvent être l'une et l'autre numériques : la première est une suite de quatre nombres dont le premier surpasse ou est surpassé par le second, d'autant d'unités que le troisième surpasse ou est surpassé par le quatrième : cette suite n'étant que l'égalité de deux différences, serait mieux nommée *équi-différence*, dénomination qui la définit exactement. La seconde est une suite de quatre termes dont le premier contient le second autant de fois que le troisième contient le quatrième : cette proportion, qui n'est que l'égalité de deux quotiens, serait mieux désignée par la dénomination *d'équi-quotient*. On note ainsi la proportion arithmétique

$$12 . 8 : 6 . 2,$$

et la proportion géométrique de cette manière

$$8 : 4 :: 6 : 3.$$

Mais comme dans la première, le point interposé entre deux nombres est employé d'ailleurs à indiquer la multiplication, tandis qu'il sert ici à rappeler une différence ; et comme dans les deux proportions, la relation d'égalité entre les deux différences et entre les deux quotiens, est rappelée dans la première par deux points qui notent la division, et dans la seconde par quatre points, il convient,

pour éviter la double acception et la multiplicité des signes, de noter la proportion arithmétique, ou l'équi-différence de cette manière

$$12 - 8 = 6 - 2,$$

et la proportion géométrique ou l'équi-quotient de celle-ci

$$8 : 4 = 6 : 3, \text{ ou } \frac{8}{4} = \frac{6}{3}.$$

Dans ces proportions, le premier et le quatrième termes sont dits *extrêmes;* le second et le troisième son dits *moyens :* la différence $12 - 8$ ou $6 - 2$ est dite *rapport arithmétique*, et le quotient $8 : 4$ ou $\frac{8}{4}$, $6 : 3$ ou $\frac{6}{3}$, est dit *rapport géométrique :* le premier terme de chaque rapport se nomme *antécédent*, et le second terme se nomme *conséquent.*

(94) Les démonstrations des théorèmes sur les équi-différences et sur les équi-quotiens, se déduisent de cette propriété évidente dont jouit l'égalité *de n'être pas altérée, soit qu'on augmente ou qu'on diminue ses deux membres d'un même nombre, soit qu'on les multiplie ou qu'on les divise par un même nombre, soit enfin qu'on les élève à la même puissance, ou qu'on en extraie une racine de même ordre* (81), puisque l'un des membres ne faisant que répéter l'autre sous une autre forme, si l'on effectue la même opération de part et d'autre, les résultats numériques ne peuvent manquer d'être égaux.

(95) *Dans toute équi-différence ou proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.*

Soit l'équi-différence

$$12 - 8 = 6 - 2 :$$

si aux deux membres de cette égalité on ajoute 2, on aura

$$12 - 8 + 2 = 6 - 2 + 2 = 6,$$

en observant que 2 retranché et 2 ajouté dans le second membre, se détruisent ou donnent zéro : maintenant qu'aux deux membres de la précédente égalité, on ajoute 8, on aura

$$12 - 8 + 2 + 8 = 6 + 8 :$$

or, 8 ajouté et soustrait en même temps dans le premier membre, donnant encore zéro, l'égalité se réduit à

$$12 + 2 = 6 + 8;$$

mais $12 + 2$ est la somme des extrêmes, et $6 + 8$ est celle des moyens dans l'équi-différence donnée qui revient à la proportion

$$12 . 8 : 6 . 2.$$

Donc, etc.

Soit, en second lieu, la proportion

$$8 . 12 : 2 . 6$$

qui revient à l'équi-différence

$$8 - 12 = 2 - 6,$$

où les nombres retranchés sont respectivement plus grands que ceux dont on les retranche, ce qui fait une difficulté: en ajoutant d'abord 12, puis 6 aux deux membres, on aura

$$8 + 6 = 2 + 12:$$

si des deux membres de celle-ci on retranche d'abord 8 et ensuite 2, on trouvera

$$6-2 = 12-8, \text{ ou } 12-8 = 6-2, \text{ d'où } 12 . 8 : 6 . 2:$$

or, ayant démontré sur cette dernière proportion, que la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, la même propriété a lieu sur la proposée qui a même somme d'extrêmes et même somme de moyens.

(96) Réciproquement, *quatre nombres tels que la somme de deux de ces nombres soit égale à celle de deux autres, pourront former une équi-différence.*

Soit l'égalité

$$12 + 2 = 6 + 8$$

qui exprime la condition énoncée entre quatre nombres : si de chaque membre on soustrait 8, on aura

$$12 + 2 - 8 = 6 + 8 - 8 = 6;$$

si des deux membres de celle-ci on soustrait 2, on aura

$$12 + 2 - 8 - 2 = 6 - 2$$

qui revient à $12 - 8 = 6 - 2$,

c'est-à-dire, à $12 . 8 : 6 . 2$.

Donc, etc.

(97) *Dans toute équi-différence ou proportion arithmétique, on peut augmenter ou diminuer les deux antécédens d'un même nombre, et les deux conséquens d'un même autre nombre, sans que la proportion soit altérée, ou sans qu'elle cesse d'être proportion.*

Soit l'équi-différence

$$12 - 8 = 6 - 2,$$

qui répond à la proportion

$$12 \,.\, 8 : 6 \,.\, 2:$$

il est clair qu'on peut, sans l'altérer, augmenter les deux membres d'un même nombre et les diminuer d'un même autre nombre : ainsi, en ajoutant, par exemple, 3 de part et d'autre, on aura

$$12 + 3 - 8 = 6 + 3 - 2:$$

retranchant 5, par exemple, des deux côtés, on aura

$$12 + 3 - 8 - 5 = 6 + 3 - 2 - 5,$$

c'est-à-dire,

$$15 - 13 = 9 - 7, \text{ d'où } 15 \,.\, 13 : 9 \,.\, 7:$$

où 15 et 9 sont les antecédens 12 et 6 de la proportion donnée, augmentés de 3, et les conséquens 13 et 7 sont ceux de la même proportion, augmentés de 5. Donc, etc.

(98) On pourrait encore démontrer que lorsqu'il n'y a plus proportion arithmétique, ou équi-différence entre quatre termes, la somme des extrêmes n'est plus égale à celle des moyens, et réciproquement; en sorte que cette égalité entre la somme des extrêmes et celle des moyens, est un caractère distinctif de la proportion arithmétique.

Mais les propriétés de l'équi-différence trouvant peu d'applications, nous passerons de suite à l'équi-quotient qui en a de fort usuelles tant dans l'arithmétique que dans la géométrie.

(99) *Dans tout équi-quotient ou proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.*

Soit la proportion géométrique

$$8 : 4 = 6 : 3,$$

que nous nommerons simplement proportion : elle revient à l'égalité

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3};$$

réduisant ces fractions au même dénominateur, on a

$$\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6 \times 4}{3 \times 4}:$$

or, ces deux fractions étant égales, sous un dénominateur commun, les numérateurs sont nécessairement égaux; mais l'un d'eux, 8×3, est le produit des extrêmes de la proportion, et l'autre, 6×4, est le produit des moyens. Donc, etc.

(100) Réciproquement, *quatre nombres tels que le produit de deux de ces nombres, soit égal au produit des deux autres, pourront former une proportion.*

Soit l'égalité

$$8 \times 3 = 4 \times 6,$$

qui exprime la condition énoncée : si l'on divise de part et d'autre par 4, on aura

$$\frac{8 \times 3}{4} = 6,$$

si l'on divise ensuite par 3, il viendra

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3},$$

d'où on conclut la proportion

$$8 : 4 = 6 : 3$$

entre les quatre nombres donnés. On aurait pu diviser les deux membres de l'égalité

$$8 \times 3 = 4 \times 6$$

d'abord par 6, puis par 3, ce qui aurait donné l'égalité

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \text{ d'où } 8 : 6 :: 4 : 3:$$

or, cette proportion ayant lieu en même temps que la précédente $8 : 4 = 6 : 3$,

puisqu'elles sont tirées de la même égalité $8 \times 3 = 4 \times 6$, on déduit de leur rapprochement cette nouvelle propriété :

Dans toute proportion géométrique, on peut changer les moyens de place.

On pourrait encore diviser les deux membres de l'égalité

$$8 \times 3 = 4 \times 6$$

d'abord par 8, et ensuite par 6, ce qui donnerait

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} : \text{d'où } 4 : 8 = 6 : 3 :$$

cette proportion ayant lieu en même temps que celle-ci

$$8 : 4 = 6 : 3,$$

puisqu'elles sont tirées d'une même égalité, il est démontré que

Dans toute proportion géométrique, on peut écrire les conséquens en place des antécédens, et réciproquement.

Au reste, ces deux propriétés peuvent se déduire plus simplement de l'égalité

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

qui divisée d'abord par 6, et ensuite multipliée par 4, donne

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} : \text{d'où } 8 : 6 = 4 : 3.$$

Pour obtenir la seconde, on observe que l'égalité primitive

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

a nécessairement lieu en même temps que celle-ci $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$ entre les mêmes fractions renversées, et que cette dernière revient à

$$4 : 8 = 3 : 6.$$

(101) *Lorsque deux rapports ne sont plus égaux, ou en d'autres termes, lorsque quatre nombres ne sont plus en proportion, le produit des extrêmes n'est plus égal à celui des moyens.*

Pour exprimer une relation d'inégalité, on emploie ce signe $>$, en écrivant le plus petit des deux nombres vers la pointe, et conséquemment le plns grand vers l'ouverture, en cette manière $5 > 4$. Cela posé, si l'on a

$$8 : 2 > 6 : 3,$$

c'est-à-dire, l'inégalité de rapports

$$\frac{8}{2} > \frac{6}{3}$$

et qu'on réduise ces deux fractions au dénominateur, on trouvera

$$\frac{8 \times 3}{2 \times 3} > \frac{6 \times 2}{2 \times 3}:$$

or, comme les dénominateurs sont égaux, le plus grand numérateur sera celui de la plus grande fraction ; mais d'ailleurs ce plus grand numérateur est le produit des termes extrêmes, et le plus petit est celui des termes moyens de

$$8 : 2 > 6 : 3.$$

Donc, etc.

(102) *Réciproquement, quatre nombres étant tels que le produit de deux d'entr'eux ne soit pas égal au produit de deux autres, il n'y a pas lieu à proportion entre ces quatre nombre.*

Soit l'inégalité

$$8 \times 3 > 2 \times 6$$

qui satisfait à l'énoncé : en divisant de part et d'autre d'abord par 2 puis par 3, on obtient celle-ci

$$\frac{8}{2} > \frac{6}{3}, \text{ d'où } 8 : 2 > 6 : 3.$$

Quels que soient les deux nombres par lesquels on divise successivement les deux membres de l'inégalité $8 \times 3 > 2 \times 6$, on tombera toujours sur une inégalité de rapports.

(103) Ainsi, 1.° *lorsque quatre nombres sont en proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens ;* 2.° *lorsqu'il n'y a plus proportion entre quatre nombres, il n'y a plus*

égalité entre les produits des extrêmes et des moyens (*); 3.° *lorsque le produit des termes extrêmes est égal à celui des termes moyens, il y a proportion entre ces quatre termes;* 4.° *lorsque le produit des extrêmes n'est plus égal à celui des moyens, il n'y a plus lieu à proportion entre les quatre nombres.* D'où il résulte *que l'égalité entre les produits des extrêmes et des moyens, est une propriété caractéristique de la proportion.*

(104) De cette propriété essentielle de la proportion qui consiste dans l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, on déduit la solution de cette question : *connaissant trois termes d'une proportion, trouver le quatrième.*

Supposons d'abord que le terme inconnu soit un extrême que nous désignerons par x, et que le nombre x doive être tel qu'on ait

$$8 : 4 = 6 : x$$

on tire de là $8 \times x = 4 \times 6$,

en divisant de part et d'autre par 8, on aura

$$x = \frac{4 \times 6}{8} = \frac{24}{8} = 3;$$

et, en effet, écrivant 3 pour x dans la première proportion, on a $8 : 4 = 6 : 3$.

Que si le terme inconnu est un moyen, et qu'on ait à satisfaire à la proportion

$$8 : 4 = x : 3,$$

à cause de $4x = 3 \times 8 = 24$,

il viendra, après la division des deux membres par 4,

$$x = \frac{24}{4} = 6.$$

et, en effet, $8 : 4 = 6 : 3$.

(*) Il faut toujours entendre par termes extrêmes le premier et le dernier de la suite des deux rapports inégaux, et par termes moyens, les deux intermédiaires.

(105) On appelle *proportion géométrique continue* celle dans laquelle les deux moyens sont égaux : telle est la suivante

$$8 : 4 = 4 : 2.$$

Dans ce cas, *le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen.*

Qu'on ait à calculer le moyen x dans la proportion continue

$$8 : x = x : 2;$$

comme elle donne l'égalité (92)

$$8 \times 2 = x^2 = 16,$$

on conclura que 16 étant le carré de x, ce nombre x est la racine carrée de 16 qu'on sait être 4 : on a donc

$$8 : 4 = 4 : 2.$$

(106) Nous allons faire connaître tous les changemens de place qu'on peut faire subir aux quatre termes d'une proportion, sans que le produit des extrêmes cesse d'être égal à celui des moyens, et conséquemment sans que les termes cessent d'être en proportion (103).

Soit la proportion

$$3 : 12 = 7 : 28 :$$

on aura, en même temps, les suivantes :

1.° . . . . $3 : 7 = 12 : 28$
2.° . . . . $12 : 3 = 28 : 7$
3.° . . . . $12 : 28 = 3 : 7$
4.° . . . . $7 : 3 = 28 : 12.$

La première montre *qu'on peut changer les moyens de place*; la seconde, *qu'on peut faire des antécédens les conséquens, et réciproquement.*

(107) Passons à d'autres propriétés.

On n'altère pas une proportion 1.° en multipliant ou en divisant les deux termes d'un rapport par un même nombre, et les deux termes de l'autre rapport par un même autre nombre; 2.° en multipliant ou divisant les deux antécédens par un même nombre et les deux conséquens par un même autre nombre.

1.° Soit la proportion

$$8 : 4 = 12 : 6,$$

qui revient à l'égalité

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6} :$$

on peut multiplier les deux termes de la première fraction par 3, par exemple, et les deux termes de la seconde par 5, et on aura encore

$$\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{12 \times 5}{6 \times 5},\ \text{d'où}\ 8\times 3 : 4\times 3 = 12\times 5 : 6\times 5.$$

2.° La proportion donnée a lieu en même temps que celle-ci (106)

$$8 : 12 = 4 : 6;$$

opérant sur celle-ci comme on l'a fait sur la precédente, on aura

$$8 \times 3 : 12 \times 3 = 4 \times 5 : 6 \times 5,$$

et en changeant les moyens de place, ce qui est permis, on sera conduit à la propriété énoncée

$$8 \times 3 : 4 \times 5 = 12 \times 3 : 6 \times 5.$$

Pour obtenir les mêmes propriétés par voie de division, il suffira de substituer, par exemple, les facteurs $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ aux facteurs 3 et 5.

Soit la proportion

$$\frac{8}{12} : 12 = \frac{9}{12} \cdot x$$

où il s'agit de calculer le quatrième terme : après la multiplication des antécédens par 12, et la division des deux termes du premier rapport par 4, on est conduit à cette proportion simplifiée

$$2 : 3 = 9 : x,\ \text{d'où}\ x = \frac{27}{2} = 13 + \frac{1}{2}$$

La proportion

$$4\frac{1}{3} : x = 9\frac{3}{4} : \frac{7}{12}$$

revient à celle-ci

$$9\frac{3}{4} : \frac{7}{12} = 4\frac{1}{3} : x$$

ou

$$\frac{39}{4} : \frac{7}{12} = \frac{13}{3} : x;$$

divisant les antécédens par 13, multipliant les deux termes du premier rapport par 12, et enfin les antécédens par 3, la précédente devient

$$27 : 7 = 1 : x, \text{ d'ou } x = \frac{7}{27}.$$

On pourra s'exercer à tirer la valeur de x de la proportion

$$\frac{4\times 0{,}24\ 24\ 24 \text{ etc.}}{100} : \frac{3}{7}\times 0{,}27 = \frac{0{,}37}{2{,}14\ 36\ 36\ 36 \text{ etc.}} : x,$$

en observant que 0,24 24 etc., est une fraction périodique commençant au chiffre des dixièmes, et que dans 2,14 36 36 etc. la période 36 36 etc. ne commence qu'à la troisième place : il faudra donc préliminairement remplacer ces fractions périodiques par les fractions génératrices (85, 86).

(108) *Dans toute proportion ou équi-quotient*, 1.° *la somme ou la différence des deux termes du premier rapport, est à l'antécédent ou au conséquent de ce rapport, comme la somme ou la différence des deux termes du second rapport, est à l'antécédent ou au conséquent de ce rapport;* 2.° *la somme des deux termes du premier rapport est à la différence des mêmes termes, comme la somme des deux termes du second rapport, est à la différence des mêmes termes.*

1.° Soit toujours la proportion

$$8 : 4 = 12 : 6.$$

d'où résulte l'égalité

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6},$$

si on augmente chacun des deux membres d'une unité, ce qui n'altère pas l'égalité, on aura la suivante:

$$\frac{8}{4} + 1 = \frac{12}{6} + 1 :$$

en réduisant l'unité dans le premier membre au dénominateur 4, et l'unité dans le second au dénominateur 6, on aura

$$\frac{8+4}{4} = \frac{12+6}{6}, \text{ d'où } 8 + 4 : 4 = 12 + 6 : 6.$$

L'égalité $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$ a lieu en même temps que celle-ci

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12} :$$

ajoutant l'unité à chaque membre, réduisant l'unité du premier membre au dénominateur 8, et celle du second au dénominateur 12, puis ajoutant les fractions, en ne faisant cependant qu'indiquer la somme des numérateurs, on aura

$$\frac{4+8}{8} = \frac{6+12}{12}, \text{ d'où } 8 + 4 : 8 = 12 + 6 : 12.$$

Reprenons la première égalité $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$, et retranchons l'unité de chaque membre, il viendra

$$\frac{8}{4} - 1 = \frac{12}{6} - 1 ;$$

réduisant l'unité du premier membre au dénominateur 4, et celle du second au dénominateur 6, on aura

$$\frac{8}{4} - \frac{4}{4} = \frac{12}{6} - \frac{6}{6},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{8-4}{4} = \frac{12-6}{6}, \text{ d'où } 8 - 4 : 4 = 12 - 6 : 6.$$

Soit enfin l'égalité

$$\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$$

qui a lieu en même temps que $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$: si de l'égalité $1=1$, on retranche la précédente membre à membre, on aura celle-ci

$$1-\frac{4}{8}=1-\frac{6}{12},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{8}{8}-\frac{4}{8}=\frac{12}{12}-\frac{6}{12}, \text{ d'où } 8-4:8=12-6:12.$$

2.° Reprenons deux des propriétés ci-dessus, savoir:

$$\left.\begin{array}{l} 8+4:4=12+6:6 \\ 8-4:4=12-6:6 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} 8+4:12+6=4:6, \\ 8-4:12-6=4:6: \end{array}\right.$$

comme le second rapport $4:6$ est commun aux deux proportions, les deux premiers rapports seront égaux, et on aura d'abord

$$8+4:12+6=8-4:12-6,$$

c'est-à-dire, après le changement de place des moyens,

$$8+4:8-4=12+6:12-6.$$

(109) *Si l'on multiplie plusieurs proportions terme à terme ou par ordre, les produits résultans seront en proportion.*

Soient les proportions

$$\left.\begin{array}{l} 4:2=6:3 \\ 5:10=4:8 \\ 3:9=7:21 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} \frac{4}{2}=\frac{6}{3} \\ \frac{5}{10}=\frac{4}{8} \\ \frac{3}{9}=\frac{7}{21}: \end{array}\right.$$

le produit des premiers membres de ces égalités, sera évidemment égal à celui des seconds membres (94), et on aura, d'après la règle de la multiplication des fractions,

$$\frac{4\times5\times3}{2\times10\times9}=\frac{6\times4\times7}{3\times8\times21};$$

d'où résulte la proportion

$$4 \times 5 \times 3 : 2 \times 10 \times 9 = 6 \times 4 \times 7 : 3 \times 8 \times 21,$$

qui rend l'énoncé.

On conclut de là et de la définition du carré et du cube, que *quatre termes étant en proportion, leurs carrés et leurs cubes sont pareillement en proportion, et inversement, que quatre termes étant en proportion, il en est de même de leurs racines carrées ou cubiques*, propriété qui s'étend de proche en proche aux puissances et aux racines de tous les ordres.

(110) On voit avec quelle facilité toutes ces propriétés de la proportion géométrique ou de l'équi-quotient, se déduisent de l'égalité de deux rapports, d'après ce principe qui réunit l'évidence à la fécondité, et qui consiste en ce *qu'une égalité ne cesse pas d'être vraie, lorsqu'on opère de la même manière sur ses deux membres.*





CHAPITRE X.

Application de la doctrine des Proportions.

(111) Dans les questions que nous allons traiter, il s'agit toujours de découvrir un nombre inconnu lié à trois nombres donnés par une proportion géométrique, ce qu'on fait aisément au moyen de l'égalité qu'on en tire entre le produit des extrêmes et celui des moyens. Comme les données sont au nombre de trois, ou peuvent, au moins, être réduites à ce nombre, on appelle *règles de trois* celles qu'il faut faire pour résoudre ces questions : on en distingue de *simples* et de *composées*, qui peuvent être *directes* ou *inverses*. Dans tous les cas, la difficulté consiste à traduire la question proposée en proportion : or, lorsqu'on a bien distingué parmi les données et l'inconnue, les deux termes d'une même espèce, et les deux termes d'une même autre espèce, on a toujours cette proportion :

Le plus petit terme d'une espèce, est au plus grand de cette espèce ; comme le plus petit terme de la seconde espèce, est au plus grand terme de cette espèce.

Mais il peut arriver que les deux termes de la seconde espèce, doivent correspondre directement à leurs *relatifs* de de la seconde espèce, ou *vice versa :* ce qui donne lieu aux distinctions en *règles directes* et *inverses* établies plus haut.

Mais comme ces généralités pourraient paraître trop abstraites, nous allons recourir à des exemples qui les éclairciront.

Règles de Trois simples, directes et inverses.

1.re Question. 6 *mètres (unités de longueur) ont coûté* 36 *francs, combien coûteront* 18 *mètres ?*

Il est clair qu'autant de fois 6 mètres sont contenus dans 18 mètres, autant de fois le prix de 6 mètres, c'est-à-dire, 36 francs, sera contenu dans celui des 18 mètres. Il est visible ici que les termes d'une même espèce, savoir, 6^m et 18^m, correspondent directement à leurs relatifs de l'autre espèce, qui sont 36^f et x^f, c'est-à-dire, plus petit à plus petit, et plus grand à plus grand ; la règle est donc *directe*, et l'énoncé fournit la proportion

$$6^m : 18^m = 36^f : x^f ; \text{ d'où } x^f = 36^f \times \frac{18}{6} = 108^f.$$

On remarque que le rapport de 18^m à 6^m est abstrait, ce qui doit arriver, puisque ce rapport est le multiplicateur de 36^f, et que d'ailleurs le produit doit compter des francs.

On a un autre moyen simple de reconnaître si la règle est directe ; nous allons le faire connaître sur la question que nous venons de traiter. Par cela seul qu'une augmentation dans le nombre de mètres, auquel répond le nombre inconnu de francs, produit une augmentation dans le nombre inconnu de francs, ce qu'on exprime abréviativement, en disant que *le plus produit le plus*, les rapports entre les nombres de mètres et les nombres de francs sont directs, et on dit que la règle est *directe* : ce caractère est facile à saisir.

2.e Question. 7 *ouvriers ont fait un certain ouvrage en* 12 *jours : en combien de jours* 28 *ouvriers feront-ils le même ouvrage ?*

Plus la seconde bande d'ouvriers à laquelle répond le nombre inconnu de jours, sera nombreuse, moins il lui faudra de temps pour faire le même ouvrage : le plus dans

le premier élément, produit donc le moins dans le second; il résulte de là que lorsqu'on compare entr'eux les nombres d'ouvriers pour en faire les deux termes d'un rapport, et les nombres de jours, pour en faire les deux termes de l'autre rapport, il faut disposer les deux derniers dans un ordre inverse de celui des deux premiers : ainsi, en désignant par x^{j} le nombre inconnu de jours, on écrira

$$28^{ou.} : 7^{ou.} = 12^{j} : x^{j},$$

proportion qui montre, en effet, que le nombre 28 venant à augmenter par rapport à 7, d'où il résulte que le premier rapport augmente, le nombre inconnu x doit diminuer, afin que le second rapport augmente en même temps que le premier auquel il doit être égal. Ainsi les rapports entre les nombres d'ouvriers et les nombres de jours, étant inverses l'un de l'autre, on dit alors que la règle est *inverse*. On voit qu'ici le plus petit terme de la seconde espèce, c'est-à-dire, x^{j}, répond au plus grand de la première espèce, qui est $28^{ou.}$ ou son relatif. De la proportion ci-dessus, on tire

$$x^{j} = 12^{j} \times \frac{7}{28} = 3^{j}.$$

Il faut observer que, par la nature de l'énoncé, l'inconnu x comptant de jours, on doit prendre 12^{j} pour multiplicande, et qu'alors l'autre facteur devient nécessairement abstrait; ce qui a lieu, en effet, puisqu'il est le rapport entre deux nombres d'ouvriers.

Les énoncés précédens ne comprennent que trois données, c'est pourquoi on a donné à la règle qui les résout, le nom de *règle de trois simple :* les suivantes renfermant un plus grand nombre de données qu'on cherche à réduire à trois, donnent lieu aux *règles de trois composées.*

Règles de Trois composées, directes et inverses.

1.re Question. *Un homme marchant* 10 *heures par jour, a parcouru en* 18 *jours*, 95 *myriamètres* (*mesure itinéraire*),

on demande combien il fera de myriamètres en 27 jours, en marchant 9 heures par jour?

Cet énoncé comprend cinq données qu'il est facile de réduire à trois. En effet, marcher pendant 18 jours, à raison de 10 heures par jour, revient évidemment à marcher pendant 18 fois 10 heures, ou pendant 180 heures : de même marcher pendant 27 jours, et à raison de 9 heures par jour, revient à marcher pendant 27 fois 9 heures, c'est-à-dire, pendant 243 heures. En sorte que l'énoncé est réduit à celui-ci : *un homme marchant pendant 180 heures, a fait 95 myriamètres; s'il marche pendant 243 heures, combien fera-t-il de myriamètres?* question qui donne la proportion directe

$$180^{h} : 243^{h} = 95^{m} : x^{m}, \text{ d'où } x^{m} = 95^{m} \times \frac{243}{180}.$$

2.ᵉ Question. *Si 9 ouvriers, travaillant 8 heures par jour, ont mis 24 jours à creuser un fossé de 65 mètres de longueur sur 13 de largeur et 5 de profondeur, combien faudra-t-il de jours à 71 ouvriers, travaillant avec la même activité, à raison de 11 heures par jour, pour creuser dans le même terrain un fossé de 327 mètres de longueur sur 18 de largeur et 7 de profondeur?*

Nous donnerons plusieurs solutions de cette question, déduites de considérations différentes, et avec lesquelles il importe de se familiariser.

1.ʳᵉ *Solution.* Nous ramènerons les deux bandes d'ouvriers et toutes les données qui leur répondent, à être les mêmes, à l'exception cependant des nombres de jours et des profondeurs des fossés; ce qui est une manière de réduire toutes les données à trois seulement.

A cet effet, nous supposerons, en premier lieu, que toutes les données, à l'exception des nombres d'hommes et de jours, soient les mêmes de part et d'autre : il est clair alors que la question se réduirait *à trouver combien il fau-*

drait de jours à 71 hommes pour faire autant d'ouvrage que 9 hommes en 24 jours, en observant que l'inconnue x^j de cet énoncé particulier, est bien différente de celle de l'énoncé général : le rapport entre les nombres d'ouvriers étant inverse du rapport entre les temps, on a cette proportion

$$71^{ou.} : 9^{ou.} = 24^j : x^j \ldots\ldots (1.^o)$$

qui exprime que $9^{ou.}$ qui travaillent pendant 24^j, peuvent être remplacés par $71^{ou.}$ qui travaillent pendant x^j, tout étant égal d'ailleurs. Ainsi, nous aurons à considérer deux bandes de $71^{ou.}$, la première employée pendant x^j; et comme nous allons supposer qu'elles travaillent, la première 8^h et la seconde 11^h par jour, il faudra, au temps de la seconde, c'est-à-dire, à l'inconnue x^j qui supposait que toutes les autres données étaient les mêmes de part et d'autre, substituer une nouvelle inconnue z^j, et faire abstraction des nombres d'ouvriers qui sont les mêmes. Ainsi, et en supposant d'ailleurs que la tâche à faire soit la même, on aura à résoudre cette question : *en x^j et à raison de 8^h par jour, on a fait une certaine tâche, combien faudra-t-il de jours, à raison de 11^h par jour, pour faire la même tâche ?* on est conduit à cette proportion inverse

$$11^h : 8^h = x^j : z^j \ldots\ldots (2.^o)$$

qui permet de remplacer $71^{ou.}$ employés pendant x^j, à raison de 8^h par jour, par $71^{ou.}$ employés pendant z^j à raison de 11^h par jour ; en sorte que les nombres d'ouvriers et d'heures par jour, sont les mêmes de part et d'autre : mais si l'on fait entrer en compte les longueurs 65^m et 327^m, le nombre de jours de la seconde bande n'est plus z : nous le désignerons par t, et en supposant que les largeurs et les profondeurs des fossés soient les mêmes, nous aurons à résoudre cette question : 65^m *ont été creusés en z jours, combien faudrait-il de jours pour creuser* 327^m *?* ce qui donne lieu à la proportion directe

$$65^m : 327^m = z^j : t^j \ldots\ldots (3.^o)$$

qui autorise à remplacer 65^m en z^j par 327^m en t^j : main-

tenant les deux mêmes bandes sont ramenées à travailler pendant le même nombre d'heures par jour, et à creuser des fossés de même longueur : mais si nous tenons compte de l'inégalité des largeurs 13^m et 18^m, les temps deviendront différens, et en désignant par v^j celui qu'emploie la seconde bande, on aura la proportion directe

$$13^m : 18^m = t^j : v^j \ldots\ldots (4.^o)$$

Ainsi, parmi toutes les données relatives aux deux bandes d'ouvriers, il n'y a plus d'inégalité que dans les nombres de jours et les profondeurs 5^m et 7^m des fossés; de sorte que désignant par u^j, le nombre de jours nécessaire pour faire les 7^m, lorsqu'on a employé v^j pour en faire 5^m; on aura cette dernière proportion

$$5^m : 7^m = v^j : u^j \ldots\ldots (5.^o)$$

Il s'agit maintenant d'évaluer le nombre de jours u^j, relatif à la totalité des données : à cet effet, en vertu de la propriété (109), on multipliera terme à terme, les proportions (1.°) et (2.°), puis on divisera (107) les deux termes du second rapport par le facteur commun x^j, ce qui donnera

$$71^{ou.} \times 11^h : 9^{ou.} \times 8^h = 24^j : z^j.$$

On multipliera cette proportion par (3.°) terme à terme, puis divisant ceux du dernier rapport par z^j, facteur commun, on aura

$$71^{ou.} \times 11^h \times 65^m : 9^{ou.} \times 8^h \times 327^m = 24^j : t^j$$

Multipliant cette dernière par (4.°), et divisant les deux termes du dernier rapport par t^j, on aura

$$71^{ou.} \times 11^h \times 65^m \times 13^m : 9^{ou.} \times 8^h \times 327^m \times 18^m = 24^j : v^j.$$

Enfin multipliant celle-ci par (5.°) et divisant les deux termes du dernier rapport, par v^j, facteur commun, il viendra

$$71^{ou.} \times 11^h \times 65^m \times 13^m \times 5^m : 9^{ou.} \times 8^h \times 327^m \times 18^m \times 7^m = 24^j : u^j \ldots\ldots (M).$$

résultat qu'on aurait obtenu plus rapidement, en multipliant terme à terme les proportions (1.°), (2.°), (3.°), (4.°) et (5.°), et divisant les deux termes du dernier rapport de

la proportion résultante par le produit $x^j \times z^j \times t^j \times v^j$, facteur commun. De cette manière, ces *inconnues auxiliaires* sont éliminées, et le résultat (M) ne contient plus que les données de l'énoncé, et l'inconnue qui leur est relative, et qu'il s'agit de *dégager* ou *d'isoler*. A cet effet, on aura, en vertu de la propriété (107)

$$u^j = 24^j \times \frac{9}{71} \times \frac{8}{11} \times \frac{327}{65} \times \frac{18}{13} \times \frac{7}{5} \ldots \text{(N)}:$$

comme tous les rapports facteurs de 24^j, dans le second membre, sont abstraits, il s'ensuit que le produit est un nombre de jours, ainsi que le requiert l'énoncé.

On remarque 1.° que les numérateurs des fractions facteurs dans le second membre, sont précisément celles des données dont l'augmentation produirait une augmentation dans le nombre de jours u^j, et que les dénominateurs sont, au contraire, les données qui, venant à augmenter, font diminuer le même nombre u^j; 2.° que le facteur non-fractionnaire du second membre, se trouve être la donnée de l'espèce de l'inconnue cherchée. Il serait donc facile d'écrire immédiatement la valeur de l'inconnue pour la question cherchée et pour toutes celles dont les énoncés seraient semblables. Au reste, nous reviendrons sur ce point.

2.e *Solution.* 1.° D'après la géométrie, le vide d'un fossé, ou plutôt la quantité de terre à enlever pour faire le fossé, s'estime par le produit de la longueur par la largeur et par la profondeur : d'après ce principe, les ouvrages à faire sont, pour la première bande, $65 \times 13 \times 5$ mètres cubes, et pour la seconde, $327 \times 18 \times 7$ idem; 2.° 9 ouvriers qui travaillent pendant 24 jours et à raison de 8 heures par jour, équivalent à $24 \times 8 \times 9$ ouvriers qui travaillent pendant une heure seulement; et de même 71 ouvriers pendant x jours et 11 heures par jour, font autant que $x \times 11 \times 71$ ouvriers en une heure; et comme deux nombres d'ouvriers sont directement comme les ou-

vrages qu'ils font, lorsque le temps est le même, et qu'on n'a pas égard à d'autres circonstances, on a immédiatement la proportion

$24\times8\times9^{ou.} : x\times11\times71^{ou.} = 65\times13\times5^{m.c.} : 327\times18\times7^{m.c.}$;

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens (99), on a

$$24\times8\times9\times327\times18\times7 = x^{j}\times11\times71\times65\times13\times5:$$

si, pour dégager x, on divise de part et d'autre par le facteur $11\times71\times65\times13\times5$, ce qui n'altère pas l'égalité, on obtiendra pour x^{j} la valeur trouvée plus haut pour u^{j}.

On aurait pu transformer l'énoncé dans le suivant : *si* 8×9 *ouvriers ont fait en* 24 *jours* $65\times13\times5$ *mètres cubes, en combien de jours* 11×71 *ouvriers feront-ils* $327\times18\times7$ *mètres cubes du même ouvrage?* cet énoncé aurait fourni deux proportions dont la première aurait supposé la même tâche à faire par les deux bandes.

3.ᵉ *Solution.* Les deux bandes d'ouvriers pouvant être ramenées à $8\times9^{ou.}$ qui travaillent 1 heure, pendant chacun des 24 jours, et la seconde à $11\times71^{ou.}$ qui travaillent aussi 1 heure pendant chacun des x^{j}, il est clair que chaque ouvrier de la première bande fera $\frac{65\times13\times5}{8\times9}$ mètres cubes chaque jour, et que chaque ouvrier de la seconde bande fera $\frac{327\times18\times7}{11\times71}$ par jour : comme alors les tâches sont directement proportionnelles au nombre de jours, on aura la proportion

$$\frac{65\times13\times5}{8\times9} : \frac{327\times18\times7}{11\times71} = 24^{j} : x^{j},$$

d'où l'on tirera encore la même valeur du nombre cherché de jours.

3.ᵉ Question. 60 *ouvriers, en* 12 *jours et à raison de* 10 *heures par jour, ont creusé* 5 *fossés, chacun de* 60 *mètres de longueur sur* 12 *de largeur et* 7 *de profondeur; d'un autre côté,* 50 *ouvriers, en* 24 *jours, et à raison de* 8 *heures par jour, ont creusé* 3 *fossés, chacun de* 70 *mètres de longueur*

sur 16 de largeur et 6 de profondeur : la dureté du premier terrain est à celle du second, dans le rapport de 4 à 5 ; on demande quelle doit être, sous toutes ces données, le rapport des forces de chaque ouvrier de chacune des deux bandes ?

Puisqu'on demande le rapport entre les forces d'un ouvrier de la première bande, et d'un ouvrier de la seconde, c'est-à-dire, la valeur de la fraction entre ces forces, on pourra se donner l'un des termes de la fraction, et la question se réduira à trouver l'autre : or, rien n'empêche de représenter par 1 le numérateur de cette fraction, qui sera, par exemple, la force d'un ouvrier de la première bande, et suivant que la valeur du rapport sera $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., la force d'un ouvrier de la seconde bande sera double, triple, quadruple, etc. de celle d'un ouvrier de la première.

Cela posé, nous procèderons exactement comme nous l'avons fait dans la première solution du problème précédent, c'est-à-dire, que nous chercherons à ramener les données relatives à la première bande d'ouvriers, à être les mêmes que celles qui sont relatives à la seconde bande, à l'exception de la force 1, et des profondeurs 7 et 6, données qui, étant au nombre de trois, fourniront une proportion entr'elles et la force inconnue dépendante de la totalité des élémens.

Ainsi, 1.° en ne considérant que les nombres d'ouvriers, abstraction faite des autres données qu'on suppose les mêmes de part et d'autre, et désignant par x^{f} celle d'un ouvrier de la seconde bande, on aura la proportion inverse $50^{ou.} : 60^{ou.} = 1^{f} : x^{f}$ . . . . . (1.°)

2.° Les ouvriers des deux bandes étant maintenant au nombre de 50, et leurs forces étant x^{f} et z^{f}, lorsqu'on les fait travailler les premiers pendant 10 heures, et les seconds pendant 8 heures, différence de temps qui emporte celle des forces, on aura encore la proportion inverse

$$8^{h} : 10^{h} = x^{f} : z^{f} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2.°)$$

3.° Les deux bandes, toujours en même nombre, sont employées pendant 8 heures, avec la force z; mais les premiers devant travailler pendant 12 jours et les seconds pendant 24 jours, les forces deviendront encore inégales, et en représentant celle de la seconde bande par y^f, on aura la proportion inverse

$$24^j : 12^j = z^f : y^f \ldots\ldots (3.°)$$

4.° Les deux bandes, en même nombre, travaillent le même nombre de jours et d'heures par jour, avec la force y^f: mais la première ayant à creuser 5 fossés, et la seconde 3, il faut que les forces diffèrent : nous désignerons celle de la seconde bande par t^f : mais si on observe que les fossés étant supposés avoir les mêmes longueurs, largeurs et profondeurs, les ouvrages sont exactement dans le rapport des nombres des fossés, qui sera le même que le rapport des forces, on aura cette proportion directe

$$5^{fos} : 3^{fos} = y^f : t^f \ldots\ldots (4.°)$$

5.° Continuant à raisonner de la même manière, et observant qu'il ne reste plus à considérer successivement que les rapports entre les longueurs, les largeurs, les profondeurs, et les duretés des terrains, lesquels sont directs avec ceux des forces correspondantes, on aura cette suite de proportions directes

$$60^m : 70^m = t^f : u^f \ldots\ldots (5.°)$$
$$12^m : 16^m = u^f : v^f \ldots\ldots (6.°)$$
$$7^m : 6^m = v^f : X^f \ldots\ldots (7.°)$$
$$4^d : 5^d = X^f : Y_f \ldots\ldots (8.°)$$

A l'effet d'évaluer Y^f, qui est la représentation de la force de chaque ouvrier de la seconde bande, on multipliera terme à terme, les huit proportions précédentes, et on trouvera une proportion qui donnera

$$Y^f = 1^f \times \frac{60}{50} \times \frac{12}{24} \times \frac{10}{8} \times \frac{3}{5} \times \frac{70}{60} \times \frac{16}{12} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{4} = 1^f \times \frac{3}{4} \ldots\ldots (P),$$

ce qui veut dire que la force d'un ouvrier de la seconde bande, sera les trois quarts de celle d'un ouvrier de la première bande.

On pourra faire sur cette composition de la valeur de Y^f, des remarques analogues à celles qui ont été faites sur la valeur de u^j, dans la question précédente.

On peut abréger cette solution par les considérations suivantes : 1.° à $60^{ou.}$ qui travaillent pendant 12^j à raison de 10^h par jour, on peut substituer $12 \times 10 \times 60^{ou.}$ employés pendant 1 heure : pareillement à $50^{ou.}$ qui travaillent 24^j et 8^h par jour, on peut substituer $24 \times 8 \times 50^{ou.}$ employés une heure ; 2.° le vide de chacun des 5 fossés étant de $60 \times 12 \times 7$ mètres cubes, et celui de chacun des trois fossés, étant $70 \times 16 \times 6$ mètres cubes, les ouvrages seront $5 \times 60 \times 12 \times 7$ mètres cubes, $3 \times 70 \times 16 \times 6$ mètres cubes ; 3.° les duretés des terrains étant respectivement 4 et 5, les ouvrages à faire reviendront à $4 \times 5 \times 60 \times 12 \times 7$ mètres cubes, et $5 \times 3 \times 70 \times 16 \times 6$ idem dans deux terrains dont la dureté commune serait 1. En sorte que la question est réduite à ces termes beaucoup plus simples : *Deux bandes de* $12 \times 10 \times 60^{ou.}$ *et de* $24 \times 8 \times 50^{ou.}$, *ont à creuser des fossés de* $4 \times 5 \times 60 \times 12 \times 7^{m.c.}$ *et de* $5 \times 3 \times 70 \times 16 \times 6^{m.c.}$, *la force de chaque ouvrier de la première bande, étant* 1, *on demande quelle doit être la force de chaque ouvrier de la seconde bande ?*

En supposant que les ouvrages soient les mêmes, et que la force de la seconde bande soit X^f, on aura la proportion inverse

$$24 \times 8 \times 50^{ou.} : 12 \times 10 \times 60^{ou.} = 1 : X^f.$$

En second lieu, les bandes d'ouvriers étant les mêmes, les forces X^f et Y^f, doivent être directement proportionnelles aux ouvrages : on aura donc

$$4 \times 5 \times 60 \times 12 \times 7^{m.c.} : 5 \times 3 \times 70 \times 16 \times 6^{m.c.} :: X^f : Y^f :$$

multipliant ces proportions terme à terme, il viendra

$$24 \times 8 \times 50 \times 4 \times 5 \times 60 \times 12 \times 7 : 12 \times 10 \times 60 \times 5 \times 3 \times 70 \times 16 \times 6 = 1 : Y^f,$$

d'où l'on tire la même valeur de Y^f que ci-dessus.

A l'effet de vérifier ce résultat, on pourrait prendre pour inconnue la dureté du second terrain, celle du pre-

mier étant 1; ou plus généralement, l'une quelconque des données de la question.

On pourra s'exercer à la solution du problème suivant.

4.e Question. *On emploie deux sections d'écrivains à copier des manuscrits; les uns plus âgés ne travaillent que le jour et écrivent en ronde; les autres travaillent la nuit et écrivent en coulée: les premiers, au nombre de 24, ont transcrit en 90 jours, à raison de 8 heures par jour, 8 exemplaires d'un certain ouvrage in-4.° en 6 volumes, composés, terme moyen, de 480 pages chacun, chaque page de 60 lignes, et chaque ligne de 56 lettres: on demande en combien de nuits la seconde section d'écrivains, composée de 30 copistes qui travaillent 6 heures par séance, transcrira 9 exemplaires d'un ouvrage in-folio, comportant, l'un portant l'autre, 800 pages, chaque page 84 lignes, et chaque ligne 80 lettres: on suppose que la vîtesse des premiers copistes est à celle des seconds dans le rapport 4 : 5; que la difficulté de travailler le jour est à celle de travailler la nuit, dans le rapport 5 : 6; que celle de la ronde est à celle de la coulée dans le rapport 6 : 5; qu'enfin la difficulté de lire le premier ouvrage, est à celle de lire le second dans le rapport 8 : 7.*

Nous allons établir un principe d'après lequel on pourra écrire sur-le-champ la valeur de l'inconnue qui sert de réponse à une question conduisant à une *règle de trois*, quelque composée qu'elle soit.

J'appelle *quantité d'action* d'une bande d'ouvriers ce que produit cette bande, à raison du nombre de jours, d'heures par jour, de la force, de l'adresse, de l'activité, etc. de chaque ouvrier: j'appelle quantité *d'effet* ce qui est produit à raison de toutes ces données que je nomme *les élémens* de la quantité d'action: les *élémens* de l'effet, seront, par exemple, la quantité de fossés à creuser, leurs dimensions, la dureté du terrain, les distances auxquelles on devra porter la terre, etc. etc. Une augmentation ou une diminution dans l'une des données de la quantité d'action, ou de la grandeur de l'effet, aug-

mente ou diminue l'action ou l'effet. Lorsque l'effet restant le même, un des élémens de l'action augmente ou diminue, il faut qu'un autre élément de cette action diminue ou augmente : lorsque la quantité d'action restant la même, un des élémens de l'effet augmente ou diminue, il faut qu'un autre élément de cet effet diminue ou augmente.

Il faut observer que lorsqu'on a deux bandes d'ouvriers dont les élémens d'actions et d'effets sont liés par les rapports qu'établit entr'eux l'énoncé de toute règle de trois dite composée, élémens dont l'un est inconnu, il est toujours vrai de dire qu'aux quantités d'action et d'effet d'une bande, il est permis de substituer les quantités d'action et d'effet d'une autre bande, ou, en d'autres termes, que la *résultante* d'action et d'effet est la même de part et d'autre.

Je suppose qu'on ait écrit dans une colonne verticale A, tous les élémens relatifs à la 1.ère bande, et d'abord ceux qui se rapportent à la quantité d'action, et au-dessous ceux qui se rapportent à la grandeur de l'effet; puis, dans une autre colonne verticale B, tous les élémens qui appartiennent à la seconde bande, et dans un ordre semblable, la colonne B contenant l'inconnue qui peut être un des élémens soit de la quantité d'action soit de la grandeur de l'effet de la seconde bande.

La valeur de l'inconnue fournie par ces sortes de questions, est toujours composée d'une suite de facteurs dont l'un qu'on doit prendre pour multiplicande, est la donnée de l'espèce de l'inconnue, et dont les autres sont des rapports entre des données de la même espèce, rapports essentiellement abstraits, et dont le produit est le multiplicateur. Les raisonnemens suivans, quoiqu'ils reposent sur cette forme d'expression, serviront cependant à la démontrer.

Maintenant si l'inconnue est un élément d'action, une

augmentation de l'un quelconque des élémens d'action de la colonne A, toutes les autres donnécs restant d'ailleurs les mêmes dans A et B, doit nécessairement influer en plus sur la quantité d'action de la colonne B : elle doit donc produire un plus dans la valeur de l'inconnue qui est un élément d'action, et *vice-versâ:* donc tous les élémens d'action de la colonne A doivent être des numérateurs dans la valeur de l'inconnue.

Supposons, en second lieu, une augmentation dans un des élémens d'effet de la colonne A, toutes les autres données restant les mêmes de part et d'autre: cette augmentation en produirait une dans la grandeur de l'effet : or, cette hypothèse revient évidemment à celle où l'effet restant le même, la quantité d'action de la colonne A diminuerait; donc celle de la colonne B doit diminuer: d'où on conclut que tous les élémens d'effet de la colonne A, seront des dénominateurs dans la valeur de l'inconnue.

Examinons, en troisième lieu, comment les données de la colonne B doivent se comporter dans la formule de l'inconnue.

Lorsqu'un élément quelconque d'action augmente dans B, toutes les autres données dans A et B restant les mêmes, l'action de B doit augmenter; cependant comme la résultante totale de B doit rester la même, puisqu'elle doit équivaloir à la résultante totale de A qui n'a pas varié, il faut qu'elle diminue par un autre élément d'action; diminution qui ne peut être produite que par celle de l'inconnue: donc un plus dans un élément d'action de B, doit produire un moins dans la valeur de l'inconnue, et *vice-versâ:* d'où on conclut que tous les élémens d'action de B doivent être écrits en dénominateur.

Enfin, une variation en plus dans un élément d'effet de B, équivaudrait à une variation en moins dans un élément d'action de B, toutes les autres données restant les mêmes de part et d'autre ; d'où il suit que la résultante

de B diminuerait quand celle de A reste la même : il faut donc qu'elle augmente par un autre élément d'action, qui ne peut être que l'inconnue : donc un plus dans un élément d'effet de B produit un plus dans la valeur de l'inconnue; d'où il suit que tous les élémens d'effet de B doivent être numérateurs dans la valeur de l'inconnue.

On peut maintenant prendre pour inconnue un des élémens d'effet de la colonne B, et supposer, par exemple, dans la troisième question, que les forces des ouvriers de chaque bande étant données, il s'agisse de trouver, par exemple, la longeur x d'un des 3 fossés à creuser par la 2.ᵉ bande : on tombera sur la formule suivante

$$x^{m} = 60^{m} \times \frac{12}{16} \times \frac{7}{6} \times \frac{5}{3} \times \frac{50}{60} \times \frac{24}{12} \times \frac{8}{10} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = 70^{m}$$

qu'on pourra s'exercer à composer directement, en partant des principes ci-dessus appropriés à ce nouvel énoncé.

Règles d'Intérêt.

L'argent étant supposé rapporter un certain bénéfice à celui qui l'emploie dans une entreprise, la personne qui emprunte une certaine somme d'argent, doit, en la restituant, indemniser le prêteur des bénéfices qu'il eût obtenus s'il eût fait lui-même valoir cet argent. Cette indemnité se nomme *intérêt*. Cet intérêt est stipulé à raison de tant pour 100 fr., par exemple, de 5 pour 100 fr., d'où il est facile de déduire celui d'une somme quelconque au même *taux*. On distingue deux sortes d'intérêt, *le simple* et le *composé*. L'intérêt simple est celui qui ne porte plus intérêt, de sorte que l'intérêt simple d'un capital, pendant plusieurs années, s'obtient en multipliant l'intérêt d'une année par le nombre des années pendant lesquelles il reste dans les mains de l'emprun-

teur. L'intérêt est dit composé lorsqu'au bout de la première année, il se joint au capital; d'où résulte un nouveau capital qui porte intérêt pendant l'année suivante, intérêt qu'on ajoute encore au dernier capital, pour former un nouveau capital portant encore intérêt, et ainsi de suite.

1.ère Question. *Une personne a placé* 840^f *dans le commerce, à raison de* 5 *pour* 100^f *(ce qu'on note ainsi:* 5 *pour* $\frac{5}{0}$*); on demande ce que devient ce capital au bout d'une année?*

Il est clair que 100^f seront dans 840^f, comme l'intérêt dû à 100^f sera dans l'intérêt dû à 840^f: on aura donc la proportion

$$100^f : 840^f = 5^f : x^f,$$

x désignant l'intérêt cherché: on en tire $x = \frac{840}{100} \times 5^f$ $= 42^f$: en ajoutant cet intérêt au capital, on trouve 882^f pour la somme que l'emprunteur doit restituer au bout de l'année. On aurait pu obtenir par une seule opération le capital augmenté des intérêts, en disant: si 100^f deviennent 105^f au bout d'une année, que deviendront 840^f; ce qui se traduit dans cette proportion:

$$100^f : 105^f = 840 : x = 882^f,$$

Plus le capital est considérable, plus l'intérêt est grand; le plus produit donc le plus, et la règle est directe. On peut encore observer que l'intérêt 5^f étant le $\frac{1}{20}$ de 100^f, on aura l'intérêt d'une somme quelconque à ce *taux*, en prenant le vingtième de cette somme qu'on ajoutera au capital, pour avoir le capital augmenté de l'intérêt.

La question suivante offre un exemple d'intérêt composé.

2.e Question. *On a placé un capital de* 100^f à 5 *pour cent d'interêt composé, on demande quelle est la somme qu'on doit retirer tant en capital qu'en intérêt, au bout de trois ans?*

A la fin de la première année, ou au commencement de la seconde, le capital 100^f se trouve augmenté de l'intérêt, ce qui forme un nouveau capital qui, à la fin de

la seconde année, ou au commencement de la troisième, se trouve augmenté des intérêts; nouveau capital qui, à la fin de la troisième année, s'est accru des intérêts. Il s'agit donc de suivre les états successifs de ce capital. Puisque du commencement à la fin de la première année, le capital 100^f est devenu $105^f = 100 \times 1{,}05^f$, le capital, au commencement de la seconde année, sera $100 \times 1{,}05^f$, et pour trouver ce qu'il devient à la fin de cette année, ou au commencement de la troisième, on fera la proportion

$$100 : 105 = 100 \times 1{,}05 : x = \frac{100 \times 105 \times 1{,}05}{100}$$
$$= 100 \times 1{,}05 \times 1{,}05.$$

On passera de ce second au troisième et dernier état du capital par la proportion :

$$100 : 105 = 100 \times 1{,}05 \times 1{,}05 : y$$

d'où $y = 100 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05$

Ainsi le capital 100^f devient

$$\text{à la fin de la}\left\{\begin{array}{ll} 1.^{re}\text{ année.}\ldots & 100 \times 1{,}05 \\ 2.^{e}\text{ année.}\ldots & 100 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \\ 3.^{e}\text{ année.}\ldots & 100 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 : \end{array}\right.$$

D'après ce mode régulier de composition des résultats, on est conduit à conclure que l'état du capital 100^f, après un nombre quelconque d'années, est le produit de 100^f par 1,05 facteur autant de fois qu'il y a d'années.

La somme primitive étant, par exemple, 345, on trouvera par le même raisonnement que les états successifs de ce capital, seront, en employant la notation (92).

$$\text{à la fin de la}\left\{\begin{array}{ll} 1.^{re}\text{ année}\ldots & 345 \times 1{,}05 = 345\,(1+0{,}05) \\ 2.^{e}\text{ année}\ldots & 345 \times \overline{1{,}05}^2 = 345\,(1+0{,}05)^2 \\ 3.^{e}\text{ année}\ldots & 345 \times \overline{1{,}05}^3 = 345\,(1+0{,}05)^3. \end{array}\right.$$

On observe que $0{,}05 = \frac{5}{100}$ est le taux de l'intérêt, et que

$1+0{,}05$, c'est-à-dire, $\frac{21}{20}$, est ce que devient 1 franc au bout d'une année au taux $\frac{5}{100}$. Ainsi le capital 1^f devient successivement après une, deux, trois ..... années, $\frac{21}{20}$, $\left(\frac{21}{20}\right)^2$, $\left(\frac{21}{20}\right)^3$.... et conséquemment un capital quelconque c deviendra $c\left(\frac{21}{20}\right)$, $c\left(\frac{21}{20}\right)^2$ $c\left(\frac{21}{20}\right)^3$. D'où on conclut que, pour ramener une somme considérée à une certaine époque, à ce qu'elle était une année auparavant, il faut la diviser par $\frac{21}{20}$, ou la multiplier par $\frac{20}{21}$, en supposant un taux de 5 pour $\frac{0}{0}$: que pour la ramener à ce qu'elle était, deux, trois, etc. ans auparavant, il faut la diviser par $\left(\frac{21}{20}\right)^2$, $\left(\frac{21}{20}\right)^3$, etc., ou la multiplier par $\left(\frac{20}{21}\right)^2$, $\left(\frac{20}{21}\right)^3$.......

3.e Question. *Quel est l'intérêt d'un capital de* 15540^f *prêté à* $\frac{7}{8}$ *pour* 100^f *par mois, pour 7 mois 27 jours ?*

L'intérêt de 15540 pour 7^m 27^j ou pour 237^j, revient à l'intérêt de 237×15540^f, ou de 3682980^f pour 1^j. Pareillement l'intérêt de 100^f pour 1 mois, est le même que celui de 30×100^f ou de 3000^f pour 1 jour. On a donc la proportion

$$3000^f : \frac{7}{8} = 3682980^f : x = 1074^f,20.$$

Dans cette dernière question, on a opéré comme dans la règle de trois, composée.

4.e Question. *Ayant une rente de* 3500^f *sur un capital prêté au denier 20, c'est-à-dire, à raison d'un denier de rente pour* 20^d, *on demande quelle serait la rente de ce capital au denier 25?*

La rente d'un capital est d'autant moindre qu'il faut prêter plus de deniers pour en avoir un de rente; en sorte que le rapport entre les nombres de deniers 25 et

20, est inverse de celui des rentes qui leur correspondent : d'où il suit qu'en désignant par x la rente qui répond à 25^d, on a la proportion

$25 : 20 = 3500 : x$, ou $5 : 4 = 3500 : x$, d'où $x = 2800^f$.

5.[e] Question. *Une personne a placé* 10000^f *dont une partie à* 5 *pour* 100, *et l'autre à* 6 *pour* 100 *par an; l'intérêt simple est de* 1620^f *en* 3 *ans : on demande quelle est la partie de la somme placée à* 6 *pour* 100 *par an ?*

L'intérêt des 10000^f en 3 ans, étant 1620^f, l'intérêt pour 1 an en est le tiers, c'est-à-dire, 540^f : cela posé, si le capital eût été placé à 5 pour 100, il n'eût rapporté que 500^f d'intérêt en 1 an, au lieu de 540^f : donc la partie inconnue des 10000^f placée à 6 pour 100, pendant une année, a augmenté de 40^f l'intérêt à raison de 5; or, 100^f placés à 6 pour 100, rapportent 1^f de plus qu'à 5 pour 100^f; pour trouver la portion des 10000^f, qui a produit l'augmentation 40^f, il faudra dire : si en passant du taux 5 au taux 6, on a eu 1^f pour l'augmentation d'intérêt d'un capital 100^f, l'augmentation 40^f d'intérêt sera celle de la portion cherchée du capital; ce qui se traduit dans la proportion

$$1 : 100 = 40 : x, \text{ d'où } x = 4000^f.$$

On a donc placé 4000^f à 6, et 6000^f à 5 pour 100^f.

On peut résoudre autrement cette question. Soient x la partie du capital à 6 pour 100, et y l'intérêt correspondant : on aura la proportion

$$100 : 6 = x : y, \text{ d'où } y = \frac{6x}{100}.$$

Mais $1000 - x$ sera la partie du capital à 5 pour 100, et en désignant par z l'intérêt, on aura

$$100 : 5 = 10000 - x : z, \text{ d'où } z = 500 - \frac{5x}{100}.$$

Ajoutant les valeurs de y et de z, et observant que l'intérêt annuel des 10000^f est $y + z = 540^f$, il viendra

$$540 = 500 + \frac{x}{100};$$

retranchant de part et d'autre 500^f, il viendra

$$40^f = \frac{x}{100}, \text{ d'où } x = 4000^f,$$

comme ci-dessus, et conséquemment $10000 - x = 6000^f$.

6.e Question. *Un certain capital augmenté des intérêts simples, a valu* 1235 *francs après cinq mois, et* 1312 *francs après seize mois, on demande quels étaient le capital et le taux de l'argent?*

1.° Puisque le capital primitif valait 1235 francs après 5 mois, et 1312 francs après 16 mois, il s'est accru de 77 francs en 11 mois, c'est-à-dire, de 7 francs en 1 mois, ou de 35 francs en 5 mois; mais, après cet accroissement, il a valu 1235 francs: donc le capital primitif était de 1200 francs. 2.° Cherchons le taux de l'intérêt. Puisque l'intérêt de 1200^f est de 35^f pour 5 mois, ou de 7^f pour 1 mois, 1200^f donneront 84^f par an : donc le douzième de 1200^f, c'est-à-dire, 100^f, rapporteront le 12.e de 84^f, c'est-à-dire, 7 francs.

7.e Question *On demande quelle est la somme que doit un tuteur pour un capital de* 1000^f, *pour* 3 *ans* 7 *mois* 15 *jours, au denier* 20, *à intérêts composés?*

Il résulte de la 2.e question, qu'au bout de 3 ans, le tuteur devra $\left(\frac{21}{20}\right)^3 \times 1000^f = 1157^f, 625$: s'il avait gardé le capital un an de plus, il devrait en sus la 20.e partie de 1157^f, 625, c'est-à-dire, 57^f, 888 dont il ne faut prendre que ce qui revient pour 7 mois et demi, c'est-à-dire, 36^f, 180, qui ajoutés à 1157^f, 625, donnent 1193^f, 805.

8.e Question. *On demande quelle somme il faudrait prêter pour recevoir après* 3 *ans*, 2662^f, *y compris les intérêts des intérêts, au denier* 10, *ou à raison de* 1 *pour* 10?

Pour 11 francs que l'emprunteur doit rembourser à la fin de la première année, il ne faut lui prêter que 10^f;

donc ce qu'on lui prête, ne doit être que les $\frac{10}{11}$ de ce qu'il rembourse au bout de la première année. Ainsi, si l'on désigne par x le capital primitif, par y ce qu'il est devenu à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde, par z ce qu'il est devenu à la fin de la seconde, ou au commencement de la troisième, on aura ces égalités

$$x = \frac{10}{11} y,$$

$$y = \frac{10}{11} z$$

$$z = \frac{10}{11} \times 2662$$

Donc, en substituant pour y sa valeur en z, et pour z sa valeur connue, on aura

$$x = \left(\frac{10}{11}\right)^3 \times 2662 = 2000^f$$

Remarque. Si l'intérêt, au lieu d'être à 5 pour 100, était à 6 pour 100, le capital 100 deviendrait

$$\text{à la fin de la} \begin{cases} 1.^{re}\text{ année} \ldots\ldots 100\,(1+0{,}06) \\ 2.^{e}\text{ année} \ldots\ldots 100\,(1+0{,}06)^2 \\ 3.^{e}\text{ année} \ldots\ldots 100\,(1+0{,}06)^3\,: \end{cases}$$

si l'intérêt était à 7 pour 100, le capital 100 deviendrait

$$\text{à la fin de la} \begin{cases} 1.^{re}\text{ année} \ldots\ldots 100\,(1+0{,}07) \\ 2.^{e}\text{ année} \ldots\ldots 100\,(1+0{,}07)^2 \\ 3.^{e}\text{ année} \ldots\ldots 100\,(1+0{,}07)^3\,: \end{cases}$$

or, les fractions décimales 0,05, 0,06, 0,07 reviennent à $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{100}$ dont les numérateurs indiquent le nombre de francs pour 100 qui est le dénominateur : ces fractions expriment donc le *quantum*, ou, ce qu'on appelle le taux de l'intérêt. Si donc nous désignons plus généralement ce taux d'intérêt par i, nous aurons pour les états successifs du capital 100,

$$100\,(1+i),\ 100\,(1+i)^2,\ 100\,(1+i)^3 \ldots$$

Mais, si au lieu du capital 100f, on suppose le capital 345f, les états successifs de ce nouveau capital, seront

$$345\ (1+i),\ 345\ (1+i)^2,\ 345\ (1+i)^3 \ldots$$

Qu'on désigne maintenant le capital, quel qu'il soit, par *c*: les états successifs de ce capital seront

$$c\ (1+i),\ c\ (1+i)^2,\ c\ (1+i)^3 \ldots;$$

mais puisque les exposans de $1+i$, savoir, les nombres 1, 2, 3 qui comptent combien de fois $1+i$ est facteur, sont toujours égaux aux nombres des années, il s'ensuit que si le capital c reste placé pendant n années, et qu'on dénote par x ce qu'il devient après ce temps au taux i, on aura *cette formule générale*

$$x=c\ (1+i)^n,$$

où il faudra remplacer c, i et n par les nombres donnés par la question ; puis, faisant les opérations indiquées, on aura le nombre x cherché. Dans une première lecture, on pourra passer les solutions générales.

Règle d'Escompte.

L'escompte est une *remise* ou un *rabais* que fait au *payeur* ou *banquier* celui qui ne veut pas attendre l'époque convenue pour son paiement, ou qui veut recevoir le montant d'un effet avant *l'échéance*. L'escompte est encore une retenue que le prêteur fait sur une somme d'argent prêtée pour un temps déterminé.

Les banquiers conviennent de retenir 1, 2, 3... francs pour 100, d'un effet qu'ils acquittent ou dont ils font les fonds avant l'échéance.

Les grands avantages que les fabricans et négocians de toute classe, ont retirés de cette facilité d'escompter les effets de commerce dont ils sont porteurs, ont prodigieusement multiplié ces sortes d'opérations : dès-lors il s'est établi dans les grandes places de commerce des *banques* ou bureaux ouverts à tous ceux qui ont des *effets* ou *let-*

tres-de-change à escompter, et où ces effets sont reçus à un prix d'escompte modéré, pourvu cependant qu'ils soient garantis par un certain nombre *d'endosseurs*, ou de *cautions* notoirement solvables.

Une banque d'escompte ne pouvant répondre à l'objet de son institution, sans avoir à sa disposition un capital considérable, il est ordinaire que ce capital soit fourni par une réunion d'associés en commandite, entre lesquels les profits annuels sont répartis sous le nom de *dividende*.

La modicité du prix de l'escompte, constitue un des grands avantages de la banque. Mais si la banque escomptait en espèces les effets qui lui sont présentés, et qu'elle employât directement son capital à ce service, il est clair qu'elle n'aurait d'autre profit que *l'intérêt* ou *l'escompte* retenu sur les effets escomptés, insuffisant pour l'indemniser des frais d'un tel établissement. Aussi la banque n'escompte-t-elle pas en espèces, mais en billets au porteur et à vue, qui, au moyen de la confiance qu'inspire la banque, se soutiennent dans la circulation, et y remplissent une partie du service que l'argent faisait auparavant. Ainsi les profits de la banque sont en raison, non du capital effectif dont elle est propriétaire, mais bien de la quantité de billets circulans qu'elle peut soutenir. Si donc, avec un capital de dix millions en espèces, elle vient à bout de soutenir dans la circulation quarante millions de ses billets à vue, la masse de ses escomptes roulera sur 40 millions et non sur 10, et par conséquent ses profits seront réglés sur un capital fictif de 40 millions.

En supposant donc que la banque escompte le papier de commerce au prix d'escompte de 4 pour % par an, ou de ⅓ pour % par mois, elle retirera ce prix d'escompte sur un capital de 40 millions, quoique, dans la réalité, son capital ne soit que du quart de cette somme; ainsi chaque million en espèces supportant quatre millions

de billets circulans, rendra quatre fois le profit de l'escompte: d'où il suit que la banque, en escomptant au taux de 4 pour $\frac{0}{0}$ par an, se trouve par le fait, placer son capital réel à l'intérêt énorme de 1 et $\frac{1}{3}$ pour $\frac{0}{0}$ par mois, ou de 16 pour $\frac{0}{0}$ par année. Telle est la source des grands profits attachés à ces établissemens sur lesquels les bornes et la nature de ce traité ne nous permettent pas de plus grands détails.

Comme on escompte ailleurs que dans ces établissemens, nous ajouterons quelques observations.

L'escompte étant fixé à 4 pour $\frac{0}{0}$, par exemple, lorsque le prêteur retient 4^f sur 100^f pour l'escompte, il ne donne en argent que 96^f, et peut se faire faire un billet de 100 francs, et se faire payer, en effet, 100^f à l'échéance.

Ou bien le prêteur donne en argent les 100^f qu'on lui emprunte, et reçoit au terme convenu 104^f, ou il se fait faire un billet de pareille somme payable à cette époque.

Dans le premier cas, l'escompte prélevé est dit *escompte en dehors:* dans le second cas, il est dit *escompte en dedans*, parce que le billet fait par le débiteur, comprend le capital et l'escompte.

Lorsqu'on ne dit pas expressément que l'escompte est en dedans, il faut entendre qu'il est en dehors.

Escompte en dehors.

1.ere Question. *Quel est l'escompte d'un billet de 6000^f à 4 pour $\frac{0}{0}$?*

On est conduit à la proportion

$$100^f : 6000^f = 4 : x, \text{ d'où } x = 240^f$$

en sorte que pour 6000^f, on ne recevrait que 5760^f.

2.e Question. *Ayant eu 240^f d'escompte sur un billet de 6000^f, on demande quel serait, au même taux, l'escompte pour 100^f?*

On a la proportion

$6000^f : 100^f = 240^f : x$: d'où $x = 4^f$.

3.e Question. *Quel est l'escompte d'une somme d'argent de 5760^f, prêtée à l'escompte de 4 pour ‰ ?*

On a la proportion

$96^f : 5760^f = 4 : x$: d'où $x = 240^f$.

ou bien encore

$96 : 100 = 5760 : x$, d'où $x = 6000^f$:

si de 6000^f on retranche 5760^f, il restera 240^f pour l'escompte cherché.

4.e Question. *Ayant eu 240^f d'escompte sur une somme d'argent de 5760^f, que l'on a prêtée pour un temps convenu, on demande quel est le taux de l'escompte, c'est-à-dire, l'escompte en dehors sur 100^f ?*

On dira

$5760 + 240 : 100 = 240 : x$, d'où $x = 4$.

5.e Question. *On veut gagner 240^f d'escompte, à raison de 4 pour ‰, quel est le montant du billet qu'on doit prendre sous cette condition ?*

On sait, par l'énoncé, que 4 est l'escompte d'un billet de 100^f: on a donc la proportion

$4 : 240 = 100 : x = 6000$.

6.e Question. *On veut gagner 240^f d'escompte, à raison de 4 pour ‰, combien doit-on prêter en argent comptant ?*

On trouvera $x = 5760$, d'après la proportion

$4 : 240 = 96 : x$.

Escompte en dedans.

1.ère Question. *Quel est l'escompte d'un billet de 6300, à 5 pour ‰ en dedans ?*

On a $105 : 6300 = 5 : x$.

2.e Question. *Quel est l'escompte d'une somme de 6000^f en argent, à 5 pour ‰ en dedans ?*

On a $100 : 6000 = 5 : x$.

3.ᵉ Question. *Ayant eu 300ᶠ d'escompte sur une somme de 6000ᶠ en argent, on demande quel est l'escompte d'une somme de 100ᶠ en argent?*

On a $6000 : 100 = 300 : x$.

4.ᵉ Question. *Quelle somme d'argent faut-il prêter, pour gagner 300ᶠ d'escompte à 5 pour $\frac{0}{0}$?*

On a $5 : 300 = 105 : x$.

5.ᵉ Question. *Que doit-on donner en argent d'un billet de 6300ᶠ, en retenant l'escompte à 5 pour $\frac{0}{0}$ en dedans?*

On a $105 : 6300 = 100 : x$.

6.ᵉ Question. *Quel billet le débiteur doit-il faire pour une somme d'argent de 6000ᶠ qu'on lui prête, à 5 pour $\frac{0}{0}$?*

On a $100 : 6000 = 105 : x$.

De l'Escompte composé.

1.ʳᵉ Question. *On demande ce que vaut actuellement une somme connue qu'on ne doit toucher que dans un certain nombre d'années, en ayant égard aux intérêts des intérêts, sous un taux d'argent déterminé?*

Cette question générale offre un exemple *d'escompte composé*. Nous allons en préparer la solution. Une somme donnée payable après un certain temps, est le produit de la valeur de 1^f, après ce temps, par le nombre de francs contenus dans la somme donnée: d'où on conclut réciproquement que si l'on divise une somme payable au bout d'un certain temps, par la valeur d'un franc, après ce temps, le quotient sera le capital primitif.

Supposons, par exemple, *qu'il s'agisse de trouver ce que vaut actuellement, ou argent comptant, une somme connue payable dans trois ans et cinq mois, en supposant l'intérêt à 20 pour cent.* Puisque 100^f rapportent en un an 20^f; le centième de 100^f, c'est-à-dire, 1^f, rapportera en un an $\frac{20^f}{100} = \frac{1^f}{5}$; donc (76)

1^f vaut après une année $1^f + \frac{1}{5} = \frac{6^f}{5}$

1^f . . . . . . 2 ans, les $\frac{6}{5}$ de $\frac{6^f}{5} = \frac{36^f}{25}$

1^f . . . . . . 3 ans, les $\frac{6}{5}$ de $\frac{36^f}{25} = \frac{216^f}{125}$

Il reste donc à chercher ce que ces $\frac{216^f}{125}$ vaudront au bout de 5 mois. A cet effet, nous calculerons ce que devient 1^f après 5 mois : puisque 1^f rapporte par mois $\frac{1}{12}$ de $\frac{1^f}{5} = \frac{1}{60}$, en 5 mois il rapporte $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$: donc, après 5 mois, il devient $1^f + \frac{1}{12} = \frac{13^f}{12}$, et conséquemment, $\frac{216}{125}$ de 1^f, deviendront, après cinq mois, les $\frac{216}{125}$ de $\frac{13^f}{12} = \frac{234^f}{125}$: c'est donc par $\frac{234}{125}$ qu'il faut multiplier une somme donnée, pour savoir ce qu'elle devient après 3 ans et 5 mois, au taux de 20 pour 100^f; et c'est par la même fraction qu'il faut diviser une somme donnée, payable dans 3 ans 5 mois, pour savoir ce qu'elle vaut actuellement.

2.e Question. *Un marchand achète pour 2808 fr. de marchandises à 7 ans 8 mois de crédit : pour s'acquitter, il souscrit une lettre-de-change payable dans 4 ans 3 mois : on demande de quelle somme il doit la faire, sous la condition qu'on ait égard aux intérêts des intérêts, et que l'intérêt soit à raison de 20^f pour 100^f par an ?*

La différence entre 7 ans 8 mois et 4 ans 3 mois, qui est 3 ans 5 mois, est l'anticipation du paiement; en sorte que la question revient à calculer à combien se réduit un effet de 2808^f, lorsqu'on l'acquitte 3 ans 5 mois avant son échéance; ou, ce qui revient au même, à trouver quel est actuellement le capital qui, dans 3 ans 5 mois, deviendra 2808 fr., à raison de 20 pour %, par an, à intérêt com-

posé. D'après ce qui est dit précédemment, il faut diviser 2808 par $\frac{234}{125}$ ou multiplier 2808 par $\frac{125}{234}$, opération qui donne 1500^f pour le montant de la lettre-de-change avec laquelle il acquittera les 2808^f.

3.e Question. *On propose d'évaluer en argent comptant, deux sommes, l'une de 6000^f, payable dans 25 mois, l'autre de 27000^f, payable dans 4 mois, l'intérêt simple de l'argent étant à 2 pour 100 par mois?*

1.ere *Solution.* L'intérêt de 100^f étant de 2^f pour un mois, sera de 50^f pour 25 mois, et de 8^f pour 4 mois: donc 100^f comptant, valent 150^f après 25 mois, et 108^f après 4 mois. Cela posé, puisque 150^f payables dans 25 mois, valent comptant 100^f, un franc vaut comptant $\frac{100^f}{150}=\frac{2^f}{3}$: les 6000 francs payables dans 25 mois, valent donc comptant $\frac{2\times6000^f}{3}=4000^f$. Puisque 108^f payables dans 4 mois, valent comptant 100^f, un franc vaudra $\frac{100^f}{108}=\frac{25}{27}$, et les 27000^f payables dans quatre mois, vaudront comptant $\frac{25\times27000^f}{27}=25000^f$. Ainsi chaque somme sera diminuée de 2000^f, et ensemble elles vaudront actuellement 29000^f.

2.e *Solution.* Puisque, pour 25 mois, l'escompte de 150^f, est de 50^f, l'escompte de 1^f sera $\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$; conséquemment l'escompte des 6000^f, sera $\frac{1}{3}\times6000^f=2000^f$. Puisque, pour 4 mois, l'escompte de 108^f est 8^f, l'escompte de 1^f sera $\frac{8}{108}=\frac{2}{27}$; donc l'escompte des 27000^f sera $\frac{2}{27}\times27000^f=2000^f$. Ces résultats s'accordent avec les précédens.

Les banquiers trouvent leur avantage à opérer comme il suit : ils disent : l'escompte de 100^f est pour un mois de 2^f, pour 4 mois de 8^f, et pour 25 mois de 50^f : donc, pour 25 mois, l'escompte de 1^f sera $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$, et celui de 6000^f sera de 3000^f : pour 4 mois, l'escompte de 1^f sera $\frac{8}{100}$; d'où il suit que l'escompte de 27000^f sera $\frac{8}{100}\times 27000^f = 2160.^f$

Par le premier procédé, le bénéfice du banquier n'était sur les deux sommes que de 4000^f, tandis que par le second, ce bénéfice est porté à $3000^f + 2160^f = 5160^f$, ce qui fait une augmentation d'escompte de 1160^f. On voit donc qu'il ne suffit pas de convenir du taux de l'escompte, mais qu'il faut encore spécifier de quelle manière on calculera cet escompte.

Le premier de ces escomptes est plus légal, puisqu'il n'est que l'intérêt de l'argent au taux convenu. En rapprochant ces deux procédés, on voit que le premier résout cette question : *si sur* 150^f, *on retient* 50^f, *combien sur* 6000^f *retiendra-t-on ?* d'où résulte la proportion

$$150 : 50 = 6000 : x,\text{ d'où } x = 2000^f ;$$

et que le second résout celle-ci : *si sur* 100 *on retient* 50 ; *combien sur* 6000 *retiendra-t-on ?* ce qui donne la proportion

$$100 : 50 = 6000 : x,\text{ d'où } x = 3000^f.$$

On en dirait autant de la seconde somme.

4.e Question. *Quelqu'un qui devait payer* 1344^f *au bout d'un certain temps, s'acquitte en donnant sur-le-champ* 1200^f, *à raison de* 3 *pour* 100 *d'escompte par an : on demande de combien de temps il a anticipé le paiement, en n'ayant égard qu'aux intérêts simples.*

Puisque les 1200^f comptant valent 1344^f après le temps cherché, l'augmentation 144^f exprime donc l'intérêt de

1200^f pendant le temps cherché, à raison de 3 pour cent d'intérêt par an : or, 3^f étant l'intérêt de 100^f en 12 mois, 36^f seront l'intérêt de 1200^f en 12 mois, 1^f sera l'intérêt de 1200^f en $\frac{12}{36}$ mois, ou en $\frac{1}{3}$ mois; donc les 144^f exprimeront l'intérêt de 1200^f en $\frac{144}{3}$ mois, ou en 4 ans : d'où on conclut que le paiement a été anticipé de 4 ans, résultat qu'on peut vérifier.

De la Tare.

La *tare* est un rabais que fait à l'acheteur celui qui vend au poids une marchandise qui n'est pas séparée de l'enveloppe dans laquelle elle est contenue, ou qui est pesée avec l'enveloppe. Le poids de la marchandise et de l'enveloppe, est ce que les marchands appellent *le poids brut;* le rabais estimé à tant pour %, a pour objet d'éviter de peser séparément la marchandise et l'enveloppe : le poids brut, déduction faite de celui de la tare, est ce qu'on appelle *le poids net.*

Toutes les questions que l'on peut proposer sur la tare, reviennent à celles de l'escompte en dehors ; en observant que 100 est le poids brut, que 4, par exemple, est la tare, et que 96 est le poids net.

Des Primes d'assurance.

La somme qu'un marchand qui veut faire assurer sa marchandise, paie à l'assureur pour le prix de l'assurance, est ce que les négocians appellent *prime d'assurance* : on la règle à 1, 2, 3, 4, etc., pour %. Toutes les questions sur les primes d'assurance conduisent donc à des proportions directes qu'il est toujours facile d'établir.

De la Commission.

On entend par *commission* la rétribution que quelqu'un accorde à un négociant pour une vente ou un achat, ou

pour des paiemens ou recouvremens qu'il a chargé ce négociant de faire pour son compte. La commission se règle toujours à $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, etc., pour 100. Celui qui fait une vente ou des recouvremens, retient sa commission sur le montant des ventes qu'il a faites, ou sur celui des fonds qu'il a touchés : ainsi, sur une vente de 100^{f}, la commisson étant à 2 pour $\frac{0}{0}$, il retient 2^{f}, et ne rend ainsi à son commettant que 98^{f}. Donc, on calcule la commission sur des rentes, des recouvremens ou des remises, comme l'escompte en dehors. Il n'en est pas de même de la commission qui est due à celui qui a fait un achat de marchandises ou qui a fait des paiemens pour compte d'autrui ; car la commission d'un achat, étant fixée à 2 pour $\frac{0}{0}$, il est dû 102^{f} à celui qui a fait un achat de 100^{f}, c'est-à-dire, qu'il lui est dû le *débours* de 100^{f}, plus 2^{f} de commission. On calcule donc la commission due sur un achat ou sur des débours faits pour compte d'autrui, comme l'escompte en dedans.

Des Pertes et Bénéfices.

On calcule toujours la perte et le bénéfice d'une opération à 1, 2, 3, etc. pour $\frac{0}{0}$. La perte doit être soustraite d'une opération de 100^{f} : le bénéfice doit être ajouté à 100^{f}. Ces questions rentrent donc encore dans celles de l'escompte en dedans ou en dehors.

De l'Avarie.

L'*avarie* est un dommage arrivé à des marchandises, ou une diminution de leur produit occasionné par une cause quelconque. Le dommage est supporté par les co-intéressés ou les assureurs. On règle l'avarie de 100^{f}, en proportion de la perte sur la totalité des marchandises, ce qui en détermine le taux à 1, 2, 3, 4, etc. Cette question rentre dans la suivante.

Règle de Compagnie ou de Société.

Cette règle est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte qui résulte de leur association, ou, plus généralement, *à partager un nombre proposé, en un nombre déterminé de parties qui aient entr'elles des rapports donnés.*

1.ere Question. *Trois marchands se sont associés: le premier à mis* 600^f, *le second* 800^f, *et le troisième* 400^f : *ils rompent la société, et veulent partager entr'eux le bénéfice commun qui est de* 900^f : *on demande la part qui revient à chacun?*

On observera que le gain de chaque associé doit être la même portion du gain total, que sa mise l'est de la mise totale: on a donc ce type général de proportion:

la mise totale: une mise particulière,
= gain total: gain correspondant.

Dans notre exemple, la somme des mises étant 1800^f, on a ces trois proportions

$$1800^f : 600^f = 900^f : x$$
$$1800^f : 800^f = 900^f : y$$
$$1800^f : 400^f = 900^f : z,$$

x, y, z désignant les gains dus aux mises 600^f, 800^f, 400^f : ces proportions simplifiées (107) reviennent à celles-ci

$$1 : 300^f = 1 : x = 300^f$$
$$1 : 400^f = 1 : y = 400^f$$
$$1 : 200^f = 1 : z = 200^f$$

et, en effet, la somme des bénéfices $x + y + z = 900^f$. On peut encore dire que la première mise étant le tiers de la mise totale, la seconde les $\frac{4}{9}$, et la troisième les $\frac{2}{9}$, le premier marchand doit retirer le tiers du gain total, le deuxième doit en retirer les quatre neuvièmes, et le troisième les deux neuvièmes. Enfin, on peut con-

cevoir la mise totale 1800^f partagée en 18 mises partielles ou actions de 100^f chacune, calculer le gain de chacune de ces actions, qui est évidemment le 18.eme du gain total, et multiplier successivement ce résultat par 6, 8 et 4, en considérant les mises 600^f, 800^f, 400^f comme les réunions de 6, 8 et 4 actions de 100^f chacune.

2.e Question. *Quatre négocians ont mis le premier* 16400^f, *qui ont été* 16 *mois dans la société, le second* 20500^f *qui y ont été* 10 *mois, le troisième* 40000^f *qui y ont été six mois, et le quatrième* 50100^f *qui y ont été* 4 *mois : ils ont gagné* 21000^f : *on demande le gain de chacun?*

Si toutes les mises étaient restées le même temps dans la société, les gains seraient proportionnels à ces mises : or, il est facile de ramener la question à cet état, en observant que 16400^f qui ont été 16 mois dans le commerce, rapportent autant que 16 fois cette somme pendant 1 mois : on réduira de même les autres temps à 1 mois, en multipliant chacun des capitaux par le nombre de mois correspondant, et on aura à résoudre les proportions

$$907800 : 262400 = 21000 : x$$
$$907800 : 205000 = 21000 : y$$
$$907800 : 240000 = 21000 : z$$
$$907800 : 200400 = 21000 : u,$$

907800^f représentant la somme des mises pendant 1 mois : on tire de là

$$x = 6070 \frac{90}{1513}$$
$$y = 4742 \frac{354}{1513}$$
$$z = 5551 \frac{1337}{1513}$$
$$u = 4635 \frac{1245}{1513}$$

Somme = 21000

Autrement, on pourra calculer, une fois pour toutes, le rapport $\frac{21000}{9078} = \frac{3500}{1513} = 2,3132848$ par lequel on multiplicra les facteurs 2624; 2050; 2400; 2004, et on aura les produits 6070, 06; 4742, 23; 5551, 88; 4635, 82 : en les ajoutant, on a pour somme, 20999, 99, laquelle est à un centième de franc près, celle des bénéfices.

3.ᵉ Question. *Un débiteur qui ne possède que* 20 58ᶠ, 25ᶜ *demande combien il peut donner à chacun de ses créanciers, en proportion de la créance de chacun: il est dû au premier,* 2248ᶠ, 7 ; *au second*, 2030ᶠ, 8 ; *au troisième*, 1426ᶠ, 10 ; *au quatrième*, 1000ᶠ ?

Il faut considérer ces créanciers comme des associés qui doivent partager la somme 2058ᶠ, 25 des pertes, en raison de leurs mises ou créances.

4.ᵉ Question. *Un négociant failli doit* 695745ᶠ, *et ne possède que* 196000ᶠ; *on demande combien il doit donner à chacun de ses créanciers : il est dû au premier* 6954ᶠ; *au second* 3454ᶠ; *au troisième* 7964ᶠ; *au quatrième* 22954ᶠ; *au cinquième* 654419ᶠ ?

La question se réduit à celle-ci : puisque le failli ne peut sur 695745ᶠ, donner que 196000ᶠ, combien peut-il donner sur 100ᶠ; on fera la proportion

$$695745 : 196000 = 100 : x = 28^f, 18$$

et il faut calculer les inconnues de ces cinq proportions

$$100^f : 28^f, 18 = 6954 : x^{\text{I}}$$
$$100 : 28, 18 = 3454 : x^{\text{II}}$$
$$100 : 28, 18 = 7964 : x^{\text{III}}$$
$$100 : 28, 18 = 22954 : x^{\text{IV}}$$
$$100 : 28, 18 = 654419 : x^{\text{V}}$$

5.ᵉ Question. *Cinq particuliers ont fait une entreprise qui a rapporté* 48000ˡ *de bénéfice; on demande ce qui revient à chacun, en proportion de sa mise; le premier est intéressé*

pour 5^s, *le second pour* 6^s, *le troisième pour* 4^s, *le quatrième pour* 3^s, *le cinquième pour* 2^s (*) ?

On peut considérer les 20^s comme le fonds, ou la mise totale, 5^s, 6^s, 4^s, 3^s et 2^s comme les mises particulières, et les 48000^f comme le nombre à partager dans le rapport de 5 à 6 à 4 à 3 et à 2.

Pour le 1.er, les 5^s par livre, donnent . . .	12000^f
le 2.e, les 6^s	14400
le 3.e, les 4^s	9600
le 4.e, les 3^s	7200
le 5.e, les 2^s	4800
Somme	48000.

6.e Question. *Un homme laisse par testament* 48000^f *à trois neveux, à condition qu'ils auront d'au[illegible]t plus qu'ils seront moins âgés : le premier à* 30 *ans, le second* 25, *et le troisième* 20; *on demande ce qui revient à chacun ?*

Selon l'intention du testateur, celui des neveux qui a 30 ans, ne doit avoir que le 30.e de ce qu'il aurait eu, s'il n'avait qu'un an; celui qui en a 25, ne doit avoir que le 25.e de ce qu'il aurait eu s'il n'avait qu'un an; et le dernier que le 20.e de ce qu'il aurait eu dans le même cas : on peut donc considérer la somme des parts comme le $\frac{1}{30} + \frac{1}{25} + \frac{1}{20}$ de ce qu'auraient eu les neveux, s'ils n'avaient eu qu'un an chacun, et les parts respectives comme étant dans les rapports de $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{20}$, ou, après la réduction au même dénominateur, dans le rapport de 10, 12 et 15 dont la somme est 37 : il est donc maintenant facile d'établir les proportions et d'en déduire la part de chacun.

7.e Question. *Un homme en mourant laisse* 340000^f *et sa*

(*) C'est-à-dire, que le premier a fourni 5^s pour livre, ou le quart de la mise totale ; le second les $\frac{6}{20}$ ou les $\frac{3}{10}$ de cette mise, et ainsi des autres, en observant que la livre de France vaut 20^s.

femme enceinte, laquelle ne lui a jamais donné d'enfans : il ordonne que si elle accouche d'un garçon, celui-ci ait les $\frac{3}{5}$ *du bien, et la mère les* $\frac{2}{5}$; *que si elle accouche d'une fille, celle-ci ait* $\frac{1}{4}$ *du bien, et la mère les* $\frac{3}{4}$ *restans : il arrive qu'elle accouche d'un garçon et d'une fille qui parviennent à l'âge de majorité : on demande comment il faut partager la succession suivant l'intention du testateur ?*

Suivant les conditions énoncées, la mère doit avoir les $\frac{2}{3}$ de ce que doit avoir le fils; ainsi, sa part doit être à celle du fils, comme 2 : 3 : la fille ne devant avoir que le tiers de la part de la mère, la part de cette dernière est à celle de la fille comme 3 : 1. Ainsi la part de la mère est à celle du fils, comme 6 : 9, et à celle de la fille comme 6 : 2 : en sorte que le fils ayant 9 parts, la mère en a 6 et la fille 2; d'où il résulte qu'ayant partagé la succession en 17 parties égales, le fils en doit prélever 9, la mère 6, et la fille 2 seulement (*).

Sur les Changes et Arbitrages.

Une opération de change a pour but de réduire la monnaie d'un pays en celle d'un autre pays.

Par exemple, si l'on veut savoir combien 2000f valent de *livres sterling*, ou combien on recevra à Londres de livres sterling pour 2000f déposés chez un banquier à Paris, il faut faire une opération qu'on nomme *change*, et qui consiste à convertir la somme proposée de francs en monnaie d'Angleterre. On parvient à cette réduction ou conversion, en prenant pour base le rapport entre la monnaie de Paris et celle de Londres.

(*) En désignant par x la part de la mère, par y celle du fils et par z celle de la fille, on doit avoir

$$x : y = 2 : 3 = 6 : 9$$
$$x : z = 3 : 1 = 6 : 2$$

Ce rapport, qui varie tous les jours, est consigné régulièrement dans le cours de la bourse de chaque pays. A Paris, par exemple, si le change de Londres, un certain jour, est *coté* 23 francs, cela signifie que ce jour-là, Londres donne 1 livre sterling pour 23 francs. Ainsi la question actuelle donne la proportion

$$23^f : 1^{\text{li. st.}} = 2000^f : x;$$

d'où on conclut, en général, que *pour réduire des francs en livres sterling, il faudra les diviser par le prix du change, ou par le cours du jour.*

1.ere Question. *Combien* 3000^f *produiront-ils de florins courans d'Amsterdam, en supposant le change du jour à* 54 *deniers de gros banco pour* 3^f, *et l'agio à* 5 *pour* $\frac{0}{0}$, *ce qui signifie que* 100 *florins de banque, valent* 105 *florins courans?*

On a ces égalités
$$\begin{aligned} 3^f &= 54^d \text{ de gros} \\ 40^{d.\ gros} &= 1 \text{ florin banco} \\ 100 \text{ fl. b.}^o &= 105 \text{ florins courans} \\ x &= 3000^f \end{aligned}$$

x désignant ce qu'on doit avoir de florins pour 3000^f. Le produit des nombres de la première colonne est $12000 \times x$; le produit des nombres de la seconde, est 17010000; divisant 17010000 par 12000, le quotient $1417\frac{1}{2}$ est la valeur de 3000^f en florins courans. Nous allons expliquer ce procédé très-expéditif. Il résulte des rapports ci-dessus que

$$1^f = \frac{54}{3} \text{ den. de gros}$$

$$1^{d.g.} = \frac{1}{40} \text{ flor. banco}$$

$$1^{f.b.} = \frac{105}{100} \text{ flor. cour.};$$

donc (76, *Prob.* III.)

$$1^f = \frac{54}{3} \times \frac{1}{40} \times \frac{105}{100} \text{ flor. cour.}$$

et
$$3000^f = \frac{54 \times 1 \times 105 \times 3000}{3 \times 40 \times 100}.$$

L'opération dite *arbitrage*, a pour objet de chercher par la comparaison des changes de deux places avec ceux de plusieurs autres villes, quelle est la manière la plus avantageuse de faire venir ou d'envoyer des fonds d'une de ces places dans l'autre.

2.e Question. *Supposons qu'un négociant de Paris ait de l'argent à faire passer à Amsterdam: soit le change de Paris sur Amsterdam à* . . . . 55^{d}

Le change	*de Paris*	*sur Londres.*	. . . . 23^{f}
	d'Amsterdam		. . . . 10 fl.
Le change	*de Paris*	*sur Madrid.*	. . . . $14^{f},87$
	d'Amsterdam		. . . . $92^{d}\frac{1}{4}$

Quel sera le parti le plus avantageux, ou de remettre à Amsterdam du papier sur cette ville, ou d'y envoyer du papier soit sur Londres pour y être négocié à 10 *florins, soit sur Madrid pour y être négocié à* $14^{f}, 87$?

On a ces rapports

$23^{fr} = 1^{\text{liv. st. angl.}}$	$14^{fr.}, 87 = 1^{\text{pist. d'Esp.}}$
$1^{\text{liv. st.}} = 10^{\text{flor.}}$	$1^{\text{pist. d'Es.}} = 1088^{\text{maravedis}}$
$1^{\text{flo.}} = 40^{\text{den. gros holl.}}$	$375^{\text{marav.}} = 1^{\text{ducat hollandais}}$
	$1^{\text{duc. holl.}} = 92, 25^{\text{den. gros. holl.}}$

qui donnent (1.re *Quest.*) pour le résultat de l'arbitrage

avec Londres . . . . . $52^{d}\frac{4}{23}$ } pour 3 francs.
avec Madrid . . . . . 54^{d}

Or, d'après l'énoncé, si on remet à *Amsterdam* du papier sur cette ville, chaque écu de 3^{fr} y vaut 55^{d}, tandis que si on remet du papier sur *Londres*, pour y être négocié à 10 florins, ou du papier sur *Madrid* pour y être négocié à $14^{f}, 87^{c}$, chaque écu de 3 francs ne produira que $52^{d}\frac{4}{23}$ ou 54 deniers : il vaut donc mieux remettre du papier sur Amsterdam. Si l'on avait à *tirer* de Paris sur Amsterdam, il faudrait se servir de la voie de

Londres, en se faisant remettre d'Amsterdam du papier sur Londres, parce que, dans ce cas, chaque écu de 3 francs n'aurait coûté à Amsterdam que $52 \frac{4}{23}$, tandis qu'en faisant faire des remises d'Amsterdam sur Paris, chaque écu coûterait 55 deniers, et en se faisant remettre du papier sur Madrid, il ne coûterait que 54 deniers.

On dit que Paris donne le *certain* à Amsterdam, parce que, dans la manière d'énoncer le change entre ces deux places, la monnaie de Paris est fixe, tandis que celle d'Amsterdam est indéterminée, savoir, 3 francs pour 55 deniers plus ou moins. Paris donne, au contraire, l'incertain à Londres, parce que, dans la manière d'énoncer le change entre ces deux places, la monnaie de Londres est fixe, celle de Paris étant variable ou indéterminée, savoir, 1 livre sterling pour 23 francs plus ou moins.

Nous renverrons pour de plus amples détails aux Traités *ex professo* sur cette matière.

Règles d'Alliage et de Mélange.

Règle d'Alliage.

Le mot *alliage*, en terme de l'art, est principalement consacré aux métaux, et la dénomination *mélange* s'entend des autres matières qui, par leur nature, en sont susceptibles.

Nous considèrerons le premier cas. Les monnaies, et, en général, tous les ouvrages d'or et d'argent, contiennent plus ou moins de parties d'alliage qui est du cuivre; les autres parties qui sont celles de la matière pure, se nomment *parties de fin*.

Généralement on divise un poids déterminé d'or ou d'argent, en *dixièmes*, ou plutôt en *millièmes*. Si cette masse est sans alliage, toutes ses parties sont de fin; lorsqu'au contraire la dixième ou la millième partie de son poids

est en alliage, les parties de fin ne sont plus que les 9 dixièmes ou les 900 millièmes de son poids total.

Le nombre des parties de fin contenues dans un poids déterminé de matière d'or ou d'argent, est ce qu'on nomme *le titre* de l'or ou de l'argent. Ainsi, le titre en exprime le degré de fin, et il fait en même temps connaître le nombre des parties de l'alliage. Le titre de l'or et de l'argent indique donc le prix qu'il a dans le commerce. Celui de nos monnaies d'or ou d'argent est de 900 millièmes, ou de 9 dixièmes. Une pièce d'argent au titre de 9 dixièmes et du poids de 5 *grammes*, est appelée en France *un franc*.

Nous verrons en son lieu que le *gramme* est la nouvelle unité de poids : 10 grammes font un *décagramme*, 10 décagrammes font un *hectogramme*, dix hectogrammes font un *kilogramme* : les sous-divisions décimales du gramme sont le *décigramme*, le *centigramme* et le *milligramme* qui valent le dixième, le centième, le millième du gramme. Ainsi le titre étant divisé comme le poids, la millième partie d'un poids quelconque, répond à un millième de fin, ou plutôt à une partie de fin : d'où on conclut le poids de la masse d'or ou d'argent pur, et celui de la masse de cuivre ou d'alliage dans les matières d'or ou d'argent d'un poids donné. Ainsi, par exemple, 1 millième d'alliage sur un kilogramme, donne 1 gramme d'alliage ou de cuivre, parce qu'un kilogramme vaut 1000 grammes : 100 millièmes d'alliage sur 1 kilogramme, donnent 100 grammes de cuivre, et par conséquent 5 kilogrammes donnent 500 grammes pour poids de l'alliage au titre de 900 millièmes. On conçoit donc qu'un kilogramme, ou un hectogramme, ou un décagramme, etc., au titre de 500 millièmes, contient 500 grammes, ou 500 décigrammes, ou 500 milligrammes d'or ou d'argent fin, et autant de cuivre.

1.ere Question. *Un affineur a 38 hectogrammes d'or pur ; il en veut faire de l'or au titre 950 millièmes : on demande ce qu'il doit ajouter d'alliage à la fonte ?*

Dans cette question, 950 parties de fin doivent être augmentées de 50 parties de cuivre, et il s'agit de trouver combien à 38 hectogrammes de fin, on doit ajouter d'hectogrammes de cuivre. On est donc conduit à la proportion

$$950 : 50 = 38^{h} : x^{h}, \text{d'ou } x = 2^{h} :$$

il faut donc ajouter deux hectogrammes de cuivre. Autrement, on sait qu'on a, en même temps (108)

$$950 : 950 + 50 = 38^{h} : 38^{h} + x^{h}.$$

Si donc on désigne $38^{h} + x^{h}$ qui est le poids total de la fonte, par y^{h}, cette proportion deviendra

$$950 : 1000 = 38^{h} : y^{h}, \text{ d'où } y = 40^{h}$$

2.e Question. *On veut fondre ensemble un certain nombre de grammes d'or ou d'argent, dont 5 au titre de 950 millièmes, 25 à celui de 900 millièmes, 30 à celui de 800 millièmes, et enfin 40 à celui de 750 millièmes: on demande quel sera le titre du gramme du mélange?*

Le titre cherché et qu'on nomme *titre moyen*, est le nombre des parties de fin du mélange, divisé par le nombre des grammes de ce mélange: or,

5g à 950 parties de fin chacun contiennent .	4750 milli.
25 à 900	22500
30 à 800	24000
40 à 750	30000
100 grammes contiennent	81250

Le quotient de 81250 par 100 est 812,5 titre d'un gramme du mélange; et, en effet, 100 grammes au titre de 812,5 contiennent 81250 parties de fin (*).

3.e Question. *Un affineur a 60 hectogrammes d'or ou d'argent, au titre de 900 millièmes : on demande combien il doit ajouter d'or ou d'argent à la fonte, pour élever le titre à 950 millièmes?*

(*) On peut voir le titre suivant qui éclaircira cette considération : d'ailleurs, les commençans pourront n'étudier ces questions que lorsqu'ils reviendront pour la seconde et même pour la troisième fois sur l'arithmétique.

Désignons par x le nombre cherché d'hectogrammes de fin : il est clair que le nombre des parties de fin contenues dans les $60 + x$ hectogrammes du mélange, doit être égal au nombre des parties de fin des 60 hectogrammes augmenté du nombre des parties de fin des x hectogrammes. Or, les $60 + x$ hectogrammes de la fonte, étant chacun au titre 950 millièmes, donneront $60 \times 950 + 950x$ parties de fin : d'une autre part, 60 hectogrammes à 900 millièmes, donnent 60×900 et x hectogrammes à 1000 millièmes, donnent $1000 \times x$ parties de fin. On doit donc avoir

$$60 \times 950 + 950x = 60 \times 900 + 1000x \ldots\ldots (A),$$

c'est-à-dire,

$$57000 + 950x = 54000 + 1000x;$$

retranchant de part et d'autre d'abord 54000, puis $950x$, il viendra

$$3000 = 50x:$$

divisant des deux côtés par 50, on trouve enfin $x = 60$: il faut donc ajouter 60 hectogrammes de fin, en sorte que la fonte sera de 120 hectogrammes.

La seconde question fournit une autre solution bien simple. En effet, dans cette question, on mélange

$$\begin{array}{llr} 60^{hect} & \text{à } 900^{milli} \text{ donnent} \ldots\ldots & 54000 \\ x^{hect} & \text{à } 1000 \ldots\ldots\ldots & 1000x \\ \hline 60+x & \ldots\ldots\ldots & 54000+1000x \end{array}$$

le titre moyen est donc $\frac{54000+1000x}{60+x}$; mais d'ailleurs et d'après l'énoncé, ce titre doit être 950 millièmes : on a donc

$$950^{milli} = \frac{54000+1000x}{60+x}:$$

multipliant les deux membres par $60 + x$, on retombe sur l'égalité (A).

4.ᵉ Question. *Un orfèvre ayant 5 kilogrammes d'or où d'argent, au titre de 900 millièmes, 25 kilogrammes idem*

à 850 millièmes, 70 idem à 750 millièmes, on demande combien il doit ajouter de kilogrammes d'or ou d'argent fin à la fonte de ces 100 kilogrammes, pour élever le titre de cette fonte à celui de 950 millièmes ?

D'après ce qu'on a dit plus haut,

5 kilog.	à 900 mill.	contiennent 500 gr. de cuivre
25 id.	à 850	3750
70 id.	à 750	17500
100 kilog.		cont. 21750 gr. de cuivre.

Les 100 kilogrammes des divers titres ci-dessus, contiennent donc 21750 grammes de cuivre : or, au titre de 950 millièmes, auquel celui de cette fonte est fixé, chacun des 100 kilogrammes ne contenant que 50 grammes de cuivre, les 100 kilogrammes contiendraient donc $50 \times 100 = 5000$ grammes de cuivre : cela posé, il est évident que le degré d'alliage est plus petit, au titre donné de la fonte, qu'aux différens titres des masses données : d'où il suit que le poids de la masse totale doit être augmenté, en matière pure, dans la proportion de 5000 à 21750 ; et qu'ainsi on aura le poids primitif corrigé par la proportion

$$5000 : 21750 = 100 : x = 335 ;$$

l'addition de matière pure sera donc de 335 kilogrammes.

On peut résoudre cette question comme la précédente : car, en désignant par y le nombre de kilogrammes de fin à ajouter, celui des parties de fin de la masse sera $5+25+70+y$, fois 950 millièmes de fin : mais d'ailleurs ce nombre de parties de fin, se compose de 5×900 plus de 25×850 plus de 70×750, plus enfin de $y \times 1000$: égalant ces deux nombres, et effectuant les multiplications, on aura

$$950 \times y + 95000 = 78250 + 1000\, y :$$

retranchant de part et d'autre, d'abord 78250, et ensuite $950\, x$, on trouve

$$16750 = 50\, x :$$

divisant par 50 des deux côtés, il vient comme ci-dessus $y = 335$. En effet, dans chacun des 335 kilogrammes d'or ou d'argent pur ajouté, il y a 50 grammes de matière pure de trop, et il manque dans chacun 50 grammes d'alliage pour qu'il soit au titre de 950 millièmes: ainsi sur les 335 kilogrammes, il y a $50 \times 335 = 16750$ grammes de trop en matière pure, et il manque 16750 grammes de cuivre : dans les différentes masses à fondre, il se trouve 21750 grammes de cuivre au lieu de 5000 seulement qu'elles devraient contenir, si elles étaient au titre de 950 millièmes: elles contiennent donc de trop 16750 grammes de cuivre, et de moins 16750 grammes de matière pure. Ainsi, les 335 kilogrammes de matière pure, ajoutés, restituent les 16750 grammes de matière pure qui manquent, tandis que les 16750 grammes de cuivre de trop dans les masses données, tiennent lieu d'autant de grammes d'alliage, qui manquent sur les 335 kilogrammes qu'on ajoute en matière pure.

Remarque. On pourra proposer des questions dans lesquelles le titre de la fonte soit moindre que l'un des titres donnés.

On distingue deux sortes de règles de mélange, l'une directe et l'autre inverse.

Règle de Mélange directe.

La règle est directe, lorsque, connaissant le prix des choses mélangées qui sont toujours de même espèce, et la quantité de chacune d'elles, on veut déterminer le prix de l'unité du mélange, qu'on nomme *prix moyen*. En examinant avec attention les résultats auxquels on est conduit, lorsque les choses mêlées ne sont que de deux espèces, on découvre ce théorème remarquable : *les différences du prix moyen au prix de chacune des choses mélangées, sont en rapport inverse des nombres de choses mélangées.*

1.re Question. *On a mêlé ensemble* 3 *bouteilles de vin à* 45s *la bouteille, et deux idem à* 30s : *on demande le prix de la bouteille du mélange ?*

3	bouteilles	à 45s donnent	135s
2	idem	à 30s	60s
5			195s

La somme des prix, divisée par le nombre des bouteilles, c'est-à-dire, le prix moyen est 39s : or,

$$45 - 39 = 6,\quad 39 - 30 = 9$$

et on a $$6 : 9 = 2 : 3.$$

On peut multiplier les questions de ce genre, et reconnaître ainsi par le fait la vérité du théorème énoncé.

2.e Question. *Un marchand a acheté du vin de plusieurs espèces, savoir :*

130 *bouteilles* à 10 *décimes la bouteille*
75 . . . . . . *à* 15
231 . . . . . . *à* 12
27 . . . . . . *à* 20.

Il les mêle ensuite, et on demande ce que vaut la bouteille du mélange ?

Pour résoudre cette question, on cherchera ce que coûte la totalité du mélange, et, divisant cette somme par le nombre des bouteilles mélangées, le quotient sera le *prix moyen* cherché, parce que chaque bouteille étant à ce prix, celui de la totalité des bouteilles sera le même que celui qui résulte des données.

On se sert encore de la règle précédente pour prendre un milieu entre divers résultats donnés par l'expérience ou par l'observation, et qui ne s'accordent pas entr'eux.

3.e Question. *On a mesuré, à diverses reprises, la distance entre deux points assez éloignés : deux fois on a trouvé* 3794,48 *mètres, trois fois on a trouvé* 3795,27 *mètres, une fois on a trouvé* 3793,115 *mètres; on demande la valeur moyenne de la distance ?*

Les résultats des mesures étant tous différens, il est

assez probable qu'il y a erreur dans chacun d'eux. Si l'on avait obtenu à chaque opération un résultat exact, leur somme serait six fois la véritable mesure. Même conclusion, si quelques-uns des résultats péchaient par défaut, et les autres par excès, de manière qu'il y eût compensation. Généralement, en ajoutant les résultats, il arrive que les erreurs dans un sens, détruisent en partie les erreurs en sens contraire, d'où il suit que l'excédent se trouve d'autant plus diminué, que le nombre des mesurages par lequel on divise la somme, est plus grand. On fera donc les produits

$$2 \times 3794,48 = 7588,96$$
$$3 \times 3795,27 = 11385,81$$
$$1 \times 3793,115 = 3793,115.$$

Ces six résultats donnent pour somme 22767,885 mètres; divisant par 6, on trouve 3794,647 pour valeur moyenne de la distance.

Règle de Mélange inverse.

Dans cette règle, et en ne supposant que deux choses mélangées, le prix de chacune de ces choses est donné, ainsi que celui du mélange, et on demande dans quel rapport ces choses doivent être mélangées.

Du théorème énoncé dans la règle directe, on déduit cette règle.

Otez le plus petit des deux prix de celui du mélange; ôtez le prix du mélange du plus grand des deux prix; le rapport inverse des deux différences, sera celui des quantités au plus grand et au moindre prix dont le mélange est composé.

1.re Question. *Avec de la poudre à canon à 24s la livre, et de la poudre à 14s, on voudrait composer un mélange du poids de 10lb, qui coûtât 20s la livre : on demande ce qu'il faut prendre du poids de chaque espèce de poudre* (*)?

(*) On note la livre par ce signe lb. On peut supposer les prix en sols de France ou de Belgique.

Suivant la règle, on dira : $20^s - 14^s = 6^s$; $24^s - 20^s = 4^s$; le rapport inverse de 6 à 4, est $\frac{4}{6}$: il faudra donc prendre 4^{lb} de poudre à 14^s, et 6^{lb} de poudre à 24^s. En effet, $4 \times 14^s = 56$ et $6 \times 24^s = 144^s$: ajoutant ces deux prix, on a 200^s, prix de 10^{lb} du mélange à 20^s la livre.

En effet, le mélange de 10^{lb} à 20^s coûte 200^s ; et comme celui de 10^{lb} à 24^s coûterait 240^s, il faut diminuer ce dernier prix de 40^s, en remplaçant de la poudre à 24^s, par de la poudre à 14^s ; mais 14^s étant au-dessous de 24^s de 10^s, pour chaque livre de poudre à 24^s, remplacée par 1^{lb} de poudre à 14^s, le prix 240^s des dix livres, diminue de 10^s : il diminuera donc de 40^s en remplaçant 4^{lb} à 24^s par 4^{lb} à 14^s. Le mélange doit donc être composé de 4^{lb} à 14^s et de 6^{lb} à 24^s. Ainsi le rapport des substances mélangées est, en effet, inverse du rapport des deux différences prises suivant la règle.

Voici un raisonnement bien simple et qui fait trouver sur-le-champ le rapport entre les nombres de livres aux prix de 24^s et de 14^s. Autant on prend de livres à 24^s, autant de fois on prend de trop 4^s : autant on prend de livres à 14^s, autant de fois on prend de moins 6^s : de sorte que si l'on désigne par x le nombre de livres à 24^s et par y le nombre de livres à 4^s, on aura d'une part $x \times 4^s$ de trop, et de l'autre $y \times 6^s$ de moins, et comme les deux sommes doivent se compenser pour donner de la poudre à 20^s, on aura cette égalité

$$4 \times x = 6 \times y;$$

divisant d'abord par 4, puis par 6, on aura $\frac{x}{y} = \frac{6}{4}$, égalité qui indique qu'on doit prendre 6 livres de poudre à 24^s et 4 livres de poudre à 14^s.

2.e Question. *Dans quelle proportion doit-on mêler de la poudre à 24^s la livre et de la poudre à 14^s, pour que la livre du mélange revienne à 20^s ?*

Pour faire rentrer cette question dans la précédente,

on fixera arbitrairement le nombre des livres du mélange : ayant choisi 10^{lb}, par exemple, on trouvera par le problème précédent, que ce mélange est composé de 6^{lb} à 24^{s} et de 4^{lb} à 14^{s} ; de sorte que le rapport cherché qui est constant, sera celui de 6 à 4 ou de 3 à 2 : conséquemment 5^{lb} du mélange doivent contenir 3^{lb} à 24^{s} et 2^{lb} à 14^{s}.

3.e Question. *On veut faire un sac de blé à* 17^{f}, *en mêlant ensemble du blé à* 19^{f} *et du blé à* $14^{f}\frac{1}{2}$ *le sac : quelle portion doit-on prendre du sac à* 19^{f} *et du sac à* $14^{f}\frac{1}{2}$ *?*

Suivant la règle, le rapport des différences de prix étant celui de 4 à 5, les quantités mélangées doivent être entre elles dans le rapport de 5 à 4 : d'où il résulte que sur 9 parties du mélange, il faudra prendre 5 parties du premier blé et 4 du second. Pour rendre raison de la règle appliquée à l'énoncé, on observera que 17^{f} étant le prix de chacun des sacs du mélange composé avec des sacs à 19^{f} et à $14^{f}\frac{1}{2}$, il faut que 2^{f}, excès du plus grand prix sur celui du mélange, répétés autant de fois qu'on prend de sacs à 19^{f}, détruisent $2^{f}\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, excès du prix du mélange sur le moindre prix, répétés autant de fois qu'on prendra de sacs à $14^{f}\frac{1}{2}$. Si donc on désigne par x le nombre de sacs à 19^{f}, et par y le nombre de sacs à $14^{f}\frac{1}{2}$, on doit avoir l'égalité $2x-\frac{5}{2}y=0$, d'où $2x=\frac{5}{2}y$, en ajoutant de part et d'autre $\frac{5}{2}y$: multipliant par 2 les deux membres de la dernière égalité, on a

$$4x=5y,$$

et divisant ensuite par 5, puis par x, on trouve

$$\frac{4}{5}=\frac{y}{x}:$$

d'où l'on conclut la règle énoncée.

Les solutions par les égalités peuvent être passées dans une première lecture.

Remarque : dans les mélanges de plus de deux choses, la question d'alliage inverse est généralement indéterminée. (*Alg.* Ire *Section.*)

CHAPITRE XI.

De la suite de Rapports égaux ; des suites improprement dites Progressions arithmétiques et géométriques, et autrement des suites par équi-différences et par équi-quotiens.

De la suite de Rapports égaux.

(112) Le nom de cette suite indique assez clairement qu'elle n'est qu'une proportion géométrique prolongée : nous nous bornerons à la démonstration de la seule de ses propriétés employée dans la *géométrie*.

Dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédens, est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent ; ou comme la somme d'un certain nombre d'antécédens est à celle d'un pareil nombre de conséquens correspondans.

Soit la suite de rapports égaux

$8 : 4 = 6 : 3 = 10 : 5 = 14 : 7 = 18 : 9 = 20 : 10$

qu'on note ordinairement de cette manière :

$$8 : 4 :: 6 : 3 :: 10 : 5 :: 14 : 7 :: 18 : 9 :: 20 : 10;$$

elle donne lieu à cette autre suite d'égalités

$$\frac{8}{4} = 2; \frac{6}{3} = 2, \frac{10}{5} = 2, \frac{14}{7} = 2, \frac{18}{9} = 2, \frac{20}{10} = 2;$$

multipliant les deux membres de chacune par le dénominateur du premier, et ne faisant qu'indiquer les multiplications, on aura

$$\text{(A)} \ldots . \; 8 = 4 \times 2, 6 = 3 \times 2, 10 = 5 \times 2,$$
$$14 = 7 \times 2, 18 = 9 \times 2, 20 = 10 \times 2:$$

ajoutant maintenant ces égalités membre à membre, et observant que la somme des seconds membres n'est autre chose que le produit de 2, facteur commun, par la somme des autres facteurs $4+3+5+7+9+10$, on aura

$$8+6+10+14+18+20=2(4+3+5+7+9+10)$$

où 2 (   ) indique le produit de 2 par la somme entre crochets. Divisant maintenant de part et d'autre par ce qui multiplie 2, on aura ces égalités de rapports

$$\frac{8+6+10+14+18+20}{4+3+5+7+9+10}=2=\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}\text{ etc.};$$

d'où résulte la première partie de l'énoncé. Mais si on n'ajoute que deux, trois, quatre, etc. des égalités (A), et qu'on décompose les seconds membres comme on vient de le dire, c'est-à-dire, en deux facteurs dont l'un soit 2, on aura

$$\frac{8+6}{4+3}=2,\ \frac{8+6+10}{4+3+5}=2,\ \frac{8+6+10+14}{4+3+5+7}=2\text{ etc.}$$

et conséquemment

$$\frac{8+6+10+14+18+20}{4+3+5+7+9+10}=\frac{8+6}{4+3}$$
$$=\frac{8+6+10}{4+3+5}=\frac{8+6+10+14}{4+3+5+7}=\text{etc.};$$

d'où on conclut les proportions ou propriétés énoncées.

Plus brièvement, on peut observer que, puisque dans la suite qu'on considère, chaque antécédent est double du conséquent, la somme d'un certain nombre d'antécédens, sera également double de celle d'un pareil nombre de conséquens correspondans ; en effet, que les longueurs A, B, C, D, etc., soient respectivement doubles, triples, quadruples, etc. des longueurs a, b, c, d, etc., la somme des premières sera double, triple, quadruple, etc. de celle des secondes, et, en général, chacune des premières longueurs étant un même multiple,

ou un même sous-multiple de chacune des secondes, la somme des premières longueurs sera le même multiple ou le même sous-multiple de la somme des secondes, et conséquemment, la somme d'un nombre quelconque des premières longueurs, sera le même multiple ou sous-multiple de la somme d'un pareil nombre des secondes, considérations qui démontrent l'énoncé sans calcul.

Des Progressions d'arithmétique, ou suite par équi-différences.

(113) *La progression arithmétique, ou la suite par équi-différences*, est une suite de nombres dont chacun surpasse ou est surpassé par le suivant, du même nombre d'unités, ou entre lesquels il existe une même différence. Telles sont les suites

1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc.

24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, etc.

la première est dite *croissante*, parce que chaque terme est plus grand que le précédent; et la seconde est dite *décroissante*, parce que chaque terme est moindre que le précédent. On note ainsi la progression arithmétique :

÷ 1 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . etc.

÷ 24 . 22 . 20 . 18 . 16 . 14 . 12 . 10 . etc.

Il résulte de la définition que la progression arithmétique n'est qu'une suite d'équi-différences, qu'on pourrait écrire comme il suit :

$$2 - 1 = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = \text{etc.}$$

$$24 - 22 = 22 - 20 = 20 - 18 = 18 - 16 = \text{etc.}$$

On nomme *raison* de la suite, le nombre constant qu'il faut ajouter à un terme, ou en soustraire pour avoir le suivant : à cette dénomination insignifiante, nous substituerons celle de *différence constante* qui sera dite *additive* ou *soustractive*, suivant que la suite sera croissante ou décroissante.

(114) *Dans toute progression arithmétique, un terme quelconque est égal au premier augmenté ou diminué d'autant de fois la différence constante, qu'il y a de termes avant celui qu'on considère.*

En effet, dans le cas de la progression croissante,

1.° Le second terme est égal au premier plus la différence constante;

2.° Le troisième terme est égal au second terme plus la différence constante, et comme ce second terme est égal au premier plus cette différence, il s'ensuit que le troisième terme est égal au premier plus deux fois la différence.

3.° Le quatrième terme est égal au troisième plus la différence, ou au premier augmenté de deux plus une fois la différence, ou de trois fois la différence.

Et ainsi de suite. Et en général, le terme de la suite dont le rang est 12, ou 20, ou 30, ou etc.; est égal au premier plus la différence constante répétée 11, ou 19, ou 29, etc. fois.

En passant de la progression croissante à la progression décroissante, il faut dire *diminué* au lieu *d'augmenté*, c'est-à-dire, *moins* au lieu de *plus*.

(115) Cette propriété sert 1.° *à résoudre cette question générale : trois de ces quatre choses, savoir: le premier terme, la différence constante, un terme quelconque, le rang de ce terme, étant données, trouver la quatrième* : 2.° *à intercaler entre deux nombres donnés autant de nombres qu'on voudra, et qu'on nomme moyens arithmétiques, sous la condition que ces moyens et les deux extrêmes donnés, constituent une progression arithmétique.*

1.° Qu'il s'agisse de trouver le centième terme x d'une progression croissante ayant 4 pour premier terme, et 5 pour différence additive : on aura, d'après la loi démontrée (114), $x = 4 + 99 \times 5 = 499$. Si on donnait le premier terme 4, le centième 499, et qu'on demandât la différence nécessairement additive et que nous désignerons par y, on

aurait, d'après la loi, $499 = 4 + 99 \times y$: retranchant 4 de part et d'autre, il viendrait, $499 - 4 = 99 \times y = 495$; divisant de deux côtés par 99, on trouve $y = 5$. Connaissant le centième terme 499, la différence constante 5, trouver le premier terme z : on a l'égalité $499 = z + 99 \times 5 = z + 495$: retranchant de part et d'autre 495, il vient $z = 4$. Etant donnés le premier terme 4, la différence constante 5, et un terme 499 de la suite, trouver le rang de ce terme : désignant par t le rang du terme qui précède immédiatement celui qu'on cherche : on a l'égalité $499 = 4 + 5 \times t$: retranchant 4 de chaque membre, il vient $495 = 5 \times t$, et après avoir divisé par 5, on trouve 99 : donc le terme cherché est le centième de la suite,

2.° La solution de la seconde question se réduit à la recherche de la différence constante de la suite. Qu'il s'agisse, par exemple, d'insérer 8 moyens entre 4 et 11 : cette suite doit être croissante, et comme 11 en est le dixième terme, on aura, en désignant par d la différence inconnue et additive, $11 = 4 + 9d$: retranchant 4 de part et d'autre, puis divisant par 9, il viendra $\frac{7}{9} = d$: la suite sera donc

$$\div 4 \,.\, 4 + \frac{7}{9} \,.\, 5 + \frac{5}{9} \,.\, 6 + \frac{3}{9} \,.\, 7 + \frac{1}{9} \,.\, 7 + \frac{8}{9} \,.\, 8 + \frac{6}{9} \,.\, 9 + \frac{4}{9} \,.\, 10 + \frac{2}{9} \,.\, 11.$$

Si l'on veut entre 0 et 1 insérer neuf moyens arithmétiques, on retranchera 0 de 1, et on divisera le reste 1 par 10, ce qui donnera 0,1 pour différence constante ; en sorte qu'on aura la suite

$\div$ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1

Si l'on avait à insérer huit moyens entre 11 et 4, on serait conduit à une soustraction impossible qu'on peut éviter, en changeant cette question en celle d'insérer 8 moyens entre 4 et 11, et, en général, en prenant pour le premier extrême le plus petit des deux, ce qui rend la progression croissante, et la différence additive.

Des Progressions géométriques ou des Suites par équi-quotiens.

(116) *La progression géometrique ou la suite par équi-quotiens*, est une suite de nombres dont chacun est égal au précédent multiplié par le même nombre : telles sont les suites

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \text{etc.}$$
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64}\ \text{etc.}$$

Dans la première qui est *croissante*, *le facteur constant* est 2, et, dans la seconde qui est *décroissante*, le facteur constant, est $\frac{1}{2}$. Généralement, suivant que le facteur constant est plus grand que l'unité, ou une fraction vraie, c'est-à-dire, comprise entre 0 et 1, la suite est croissante ou décroissante, et réciproquement. Ce facteur constant a été improprement nommé *raison géométrique.* On note ordinairement les progressions géométriques comme il suit :

$$\div\!\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \text{etc.}$$
$$\div\!\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}\ \text{etc.}$$

elles reviennent à ces deux suites d'égalités

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64}\ \text{etc.}$$

$$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = \text{etc. (*)}.$$

(*) Il faut entendre que chacun des deux termes de la fraction, est lui-même une fraction, et que le trait qui répond au signe =, sépare la fraction numérateur de la fraction dénominateur.

qui ne diffèrent des suites de rapports égaux, qu'en ce que dans les progressions géométriques, le dénominateur de chaque rapport, devient le numérateur du rapport suivant.

(117) *Dans toute progression géométrique, un terme quelconque est égal au premier multiplié par le facteur constant élevé à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent celui qu'on considère, ou par le rang de ce terme diminué d'une unité* (*).

1.° Le second terme est égal au premier multiplié par le facteur constant;

2.° Le troisième terme est égal au second multiplié par le facteur constant : si dans ce produit on remplace le second terme par le produit du premier par le facteur constant, on trouvera que le troisième terme est égal au premier multiplié par le carré de ce facteur;

3.° Le quatrième terme est égal au troisième par le facteur constant : remplaçant ici le troisième terme par le premier multiplié par le carré du facteur, on conclura que le quatrième terme est égal au premier multiplié par le cube de ce facteur.

On serait pareillement conduit à conclure que les cinquième, sixième, etc., termes, sont les produits du premier par les quatrième, cinquième, etc., puissances du facteur constant : d'où résulte la démonstration de l'énoncé dans les deux cas de la progression croissante ou décroissante.

(118) Cette propriété sert 1.° *à résoudre cette question générale : trois de ces quatre choses, savoir : le premier terme, le facteur constant, un terme quelconque, le rang de ce terme,*

(*) Le produit d'un nombre deux, trois, quatre, etc., fois facteur, a été dit *puissance* seconde ou carré, troisième ou cube, quatrième, etc., de ce nombre (92) ; et le nombre considéré par rapport à sa puissance seconde ou à son carré, troisième ou cube, quatrième, etc., a été dit *racine* seconde ou carrée, troisième ou cubique, quatrième, etc.

étant données, trouver la quatrième ; 2.° à intercaler entre deux nombres donnés autant de nombres qu'on voudra, et qu'on nomme moyens géométriques, sous la condition que ces moyens et les deux extrêmes donnés, forment une progression géométrique.

1.° Que l'on demande, par exemple, le douzième terme d'une progression géométrique dont le premier terme serait 3 et le facteur constant 2 : suivant la loi démontrée, il faut multiplier 3 par la onzième puissance de 2, qu'on peut faire de plusieurs manières : le cube de 2 est 8, le cube du cube, c'est-à-dire, 8 trois fois facteur, ou 2 neuf fois facteur, est 512 : multipliant cette neuvième puissance par 4, ou par 2 deux fois facteur, on aura 2 onze fois facteur, c'est-à-dire, 2048 pour la onzième puissance de 2 : faisant le produit de 2048 par 3, qui est le premier terme, on trouve 6144, pour le douzième terme de la progression. Etant donné le terme 6144 qu'on sait être le douzième d'une progression géométrique, et le premier terme 3, trouver le facteur : on est conduit à cette égalité $6144 = 3 \times x^{11}$, x désignant le facteur constant, et x^{11} sa onzième puissance (92) : divisant les deux membres par 3, il vient $2048 = x^{11}$, ce qui signifie que 2048 est la onzième puissance de x, d'où il suit que x est la racine onzième de 2048, qu'on ne sait pas extraire, mais qui existe. Étant donné le douzième terme 6144 d'une progression géométrique, et le facteur constant 2, trouver le premier terme : on est conduit à l'égalité $6144 = y \times 2^{11} = y \times 2048$, y désignant le premier terme : si l'on divise de part et d'autre par 2048, il vient $y = 3$ qui est, en effet, le premier terme. Enfin étant donné le premier terme 3 d'une progression, le facteur constant 2, et un terme 6144 de cette progression, trouver le rang de ce terme : on a alors l'égalité $6144 = 3 \times 2^{z}$, z étant le rang du terme qui précède 6144 : après avoir divisé des deux côtés par 3, ce qui donne $2048 = 2^{z}$, il resterait à découvrir la

puissance z à laquelle il faut élever 2 pour avoir 2048, question que nous ne pouvons encore résoudre.

2.° Dans la seconde question, l'inconnue est le facteur constant. Qu'on ait, par exemple, à insérer trois moyens proportionnels géométriques entre 4 et 64 : le cinquième terme $64 = 4 \times x^4$, x désignant le facteur constant : après avoir divisé de part et d'autre par 4, il vient $16 = x^4$: le facteur x est donc la racine quatrième de 16, c'est-à-dire, 2. On est donc conduit par cette question à extraire une racine dont l'indice est égal au nombre des moyens, augmenté d'une unité : en sorte que le nombre des moyens venant à surpasser 2, on est réduit à supposer la possibilité de l'extraction ou de la solution. On observera que lorsque le second extrême est plus petit que le premier, auquel cas la progression est décroissante, et le facteur constant est fractionnaire, rien n'empêche de faire du second extrême le premier, et *vice versa* : on ramène ainsi les deux cas à un seul.

(119) Il nous reste à *sommer* un nombre quelconque donné de termes d'une progression géométrique, à partir du premier terme inclusivement; question que nous traiterons en *algèbre* d'une manière plus générale.

Reprenons, à cet effet, la progression

$$2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128,$$

et désignons la somme de ces termes par x : on aura

$$x = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \ldots (1)$$

or, si on multiplie chaque membre de cette égalité par *le facteur constant* 2 de la progression, ce qui exige qu'on multiplie chacun des termes du second membre par 2, on aura celle-ci :

$$2x = 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 \ldots (2)$$

Il est clair que si l'on retranche le premier membre de l'égalité (1) de celui de l'égalité (2), et le second membre de (1) de celui de (2), les restes formeront encore une égalité : or, dans la soustraction des seconds

membres, la partie $4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$, qui est commune, s'anéantit, et le reste est $256 - 2$: on a donc

$$x = \frac{256 - 2}{1} = \frac{2 \times 128 - 2}{2 - 1}.$$

Soit, en second lieu, la suite

$$2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 496,$$

on posera pareillement

$$x = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 496;$$

multipliant de part et d'autre par le facteur constant 3, il vient

$$3x = 6 + 18 + 54 + 162 + 496 + 1488;$$

retranchant, comme ci-dessus, la première égalité de la seconde, on a la suivante:

$$2x = 1488 - 2, \text{ d'où } x = \frac{1488 - 2}{2} = \frac{3 \times 496 - 2}{3 - 1}.$$

De ces deux exemples et de ceux qu'on pourrait y ajouter, on conclura *que la somme des termes d'une progression géométrique, s'obtient en multipliant le dernier terme par le facteur constant, du produit retranchant le premier terme, et divisant la différence par le facteur constant diminué d'une unité.*

Il conviendra, en arithmétique, de n'appliquer cette règle qu'aux progressions géométriques croissantes, parce que, dans le cas des progressions décroissantes, on tomberait sur une difficulté qui ne peut être levée qu'en algèbre.

(120) Si l'on rapproche les solutions des questions analogues que nous venons de résoudre sur les progressions arithmétique et géométrique, on remarquera que lorsque les premières se résolvent par l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, les secondes se résolvent par la multiplication, la division, la formation des puissances, et l'extraction des racines.

Des Logarithmes.

(121) Si l'on a deux progressions quelconques, l'une arithmétique et l'autre géométrique, qui se correspondent terme à terme, les termes de la première sont dits *logarithmes* des termes correspondans ou de même rang de la seconde. Comme à la même progression géométrique, on peut faire répondre terme à terme, une infinité de progressions arithmétiques, il s'ensuit *qu'un même nombre peut avoir une infinité de logarithmes;* et comme aussi à une même progression arithmétique, on peut faire répondre terme à terme une infinité de progressions géométriques, on doit conclure *qu'à un même logarithme peut répondre une infinité de nombres.*

(122) Parmi tous ces systèmes de progressions l'une arithmétique et l'autre géométrique, on a choisi le suivant :

$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8$

$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 : 100000000$, etc.,

dans lequel la progression arithmétique est la suite des nombres naturels, et la progression géométrique celle des puissances entières du nombre 10 qui est la base de notre système arithmétique.

On remarquera d'abord que *le logarithme de l'unité, est zéro*, et en second lieu, *que le logarithme de l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, est égal à ce nombre de zéros*, ou, en d'autres termes, que le *logarithme d'une puissance de* 10, *est égal à l'exposant de cette puissance* : cette dernière conclusion est évidente sur les deux progressions précédentes écrites comme il suit :

$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8$. etc.

$\div\div 1 : 10 : (10)^2 : (10)^3 : (10)^4 : (10)^5 : (10)^6 : (10)^7 : (10)^8$: etc.;

mais la progression inférieure est loin d'offrir la suite de tous les nombres et la supérieure celle de leurs logarithmes. Considérons, par exemple, le nombre 3, qui n'est pas un des termes de la suite géométrique : ce nombre est

compris entre 1 et 10, et son logarithme se trouve entre 0 et 1, dans la progression arithmétique ; d'où on peut déjà conclure que le logarithme de 3 est plus grand que 0 et plus petit que 1 : c'est ce qu'on peut encore affirmer du logarithme de tout nombre entier d'un seul chiffre. Tout nombre entier de deux chiffres tombant entre 10 et 100, a son logarithme entre 1 et 2, plus grand que 1 et plus petit que 2 : tout nombre entier de 3 chiffres tombant entre 100 et 1000, a son logarithme entre 2 et 3; plus grand que 2 et plus petit que 3, et ainsi de suite.

D'où l'on conclut généralement *que le logarithme d'un nombre entier, a toujours autant d'unités entières moins une, qu'il y a de chiffres dans le nombre correspondant.*

On observera qu'un logarithme ne peut être un nombre entier, qu'autant que le nombre correspondant est une puissance exacte de 10; et que pour tout autre nom re, le logarithme étant contenu entre deux nombres entiers consécutifs, est nécessairement composé d'un entier satisfaisant à la condition énoncée, et d'une fraction décimale infinie (*Alg.* Ire *Sect.*).

(123) Revenons au nombre 3 : pour pouvoir assigner effectivement son logarithme, il faut que 3 puisse faire partie de la progression géométrique décuple : or, on conçoit que si entre 1 et 10, on insérait un très-grand nombre de moyens proportionnels géométriques (118, 2.°), comme on passerait de 1 à 10 par des degrés d'autant plus rapprochés que le nombre de ces moyens géométriques serait plus grand, il arriverait de deux choses l'une, ou que l'un de ces moyens serait précisément le nombre 3, ou un nombre très-peu différent de 3, puisque ce nombre se trouverait entre deux moyens géométriques très-rapprochés : cela posé, si on insérait (115, 2°.) pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, et si l'on prenait parmi ceux-ci celui, qui, par le rang, répond à 3 ou à celui des moyens géométriques qui est sensiblement 3, on aurait ainsi le logarithme de 3.

Il faut donc concevoir qu'ayant inséré, par exemple, 10000000 de moyens géométriques entre 1 et 10, pareil nombre entre 100 et 1000, et ainsi de suite, on a inséré même nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc.; et il s'agit de prouver que ces moyens proportionnels, tant arithmétiques que géométriques, insérés entre les termes consécutifs des deux progressions, formeront avec les extrêmes, deux nouvelles progressions.

A cet effet, posons 10000001 $= n$ qui désignera ainsi le nombre des termes qui précèdent celui qu'on considère dans les progressions arithmétiques de 0 à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, etc.; et désignons par d, d' d''... les différences constantes inconnues de ces progressions : on aura (115,2.°)

$$1=0+n\times d,\ 2=1+n\times d',\ 3=2+n\times d'',\ 4=3+n\times d'''...$$

égalités qui reviennent évidemment à celles-ci

$$1=n\times d,\ 1=n\times d',\ 1=n\times d'',\ 1=n\times d'''....,$$

après avoir retranché 1 des deux membres de la seconde, 2 des deux membres de la troisième, 3 des deux membres de la quatrième, et ainsi de suite : or, après avoir divisé de part et d'autre par n, on conclura $d=d'=d''=d'''$, etc. Ainsi la différence étant toujours la même d'une progression à la suivante, et le dernier terme de l'une étant le premier de celle qui la suit, la première proposition est prouvée.

Pour démontrer la seconde, conservons $n=10000001$, et soient f, f', f'' f''', le facteur constant et inconnu, des progressions géométriques de 1 à 10, de 10 à 100, de 100 à 1000, etc.; on aura, d'après la notation des puissances convenue (92), et d'après la propriété (118, 2.°),

$$10=1\times f^n,\ 100=10\times f'^n,\ 1000=100\times f''^n,$$
$$10000=1000\times f'''^n.\ ....$$

Divisant, à partir de la seconde, les deux membres par 10, par 100, par 1000, etc., on trouvera

$$10=f^n,\ 10=f'^n,\ 10=f''^n,\ 10=f'''^n.\ ....$$

égalités qui montrent que les facteurs f, f', f'', f'''. . . . sont égaux, et qu'ainsi ces progressions individuelles ayant un terme commun qui est le dernier de l'une et le premier de l'autre, et le même facteur, font une seule progression.

Ainsi les termes de ces deux nouvelles progressions, l'une arithmétique et l'autre géométrique, étant en même nombre, pourront se correspondre, et ceux de la première seront, suivant la définition, les logarithmes des termes de même rang de la seconde.

(124) Si maintenant on écrit dans une colonne intitulée *nombres*, la série des nombres naturels pris dans la progression géométrique, et dans une seconde colonne intitulée *logarithmes*, les termes correspondans de la progression arithmétique, lesquels sont les logarithmes des nombres naturels, chaque logarithme étant en regard du nombre correspondant, on aura une première idée du dispositif des tables ordinaires de logarithmes. Ainsi un nombre étant donné, on pourra trouver son logarithme, et réciproquement, du logarithme donné, on repassera au nombre correspondant.

(125) Les logarithmes des nombres autres que les puissances exactes de 10, sont, ainsi que nous l'avons déjà observé (122), composés d'une partie entière et d'une fraction qui est décimale: la partie entière s'appelle *caractéristique*, et on sait (122) que le nombre de ses unités augmenté d'une unité, est égal au nombre des chiffres du nombre entier correspondant: ainsi, à la seule inspection de la caractéristique du logarithme 2, 170762, laquelle est 2, on apprend que le nombre correspondant est compris entre 100 et 1000, ou qu'il a trois chiffres dans la partie entière. Il est essentiel d'observer que, quoique le nombre 237,148 ait six chiffres, néanmoins par cela seul qu'il est compris entre 100 et 1000, son logarithme tombe entre 2 et 3; il est plus grand que 2 et plus petit que 3,

et conséquemment il est composé d'une partie entière 2 et d'une fraction décimale.

Ainsi, *lorsqu'un nombre est décimal, la caractéristique de son logarithme ne fait connaître que le nombre des chiffres dont se compose la partie entière de ce nombre.*

(126) On n'a pas consigné la caractéristique dans les tables qui ne contiennent que la partie décimale de chaque logarithme : car, ou le nombre est donné, et on en conclut la caractéristique ; ou le logarithme et conséquemment sa caractéristique sont connus, et alors la partie décimale du logarithme fait découvrir tous les chiffres du nombre, puis sa caractéristique fait trouver la place de la virgule, lorsque le nombre correspondant est décimal : au reste nous reviendrons bientôt sur ces questions.

(127) En substituant les logarithmes aux nombres dans le calcul, les opérations de la multiplication, division, formation de puissances et extraction de racines de ces nombres, se trouvent changées en opérations d'addition, de soustraction, multiplication et division de leurs logarithmes : mais cette heureuse métamorphose est fondée sur quelques propriétés que nous allons faire connaître.

Soient, à cet effet, les deux progressions

$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, etc.

$\div\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, etc.

qui ne sont astreintes qu'à la seule condition de commencer la première par 0 et la seconde par l'unité, afin que zéro soit le logarithme de l'unité, avantage qu'on appréciera bientôt. Dans la première, un terme quelconque est un multiple de la différence constante 4, égal au nombre des termes qui précèdent celui-là (114); et, dans la seconde, un terme quelconque est le facteur constant 3 élevé à une puissance ou à un exposant égal au nombre des termes qui le précèdent (117) : or, d'après la correspondance des termes des deux pro-

gressions, le multiple de la différence, qui est un terme de la progression arithmétique, est égal à la puissance du facteur qui est le terme de même rang de la progression géométrique : par exemple, le terme 28 de la première suite, est le multiple 7 de la différence 4; et le terme correspondant 2187 de la suite inférieure, est la puissance septième du facteur constant 3, c'est-à-dire, $(3)^7$.

Donc, *le terme de la progression arithmétique, qui est un certain multiple de la différence, et le terme de la progression géométrique, qui est une puissance du facteur constant, égale à ce multiple, seront toujours correspondans ou de même rang dans les deux suites.*

Considérons maintenant deux termes quelconques de la progression géométrique, et les deux correspondans de la progression arithmétique : dans le produit des deux premiers termes, le facteur constant sera facteur autant de fois qu'il l'est en somme dans les deux termes multipliés : et dans la somme des deux correspondans de l'autre suite, le multiple de la différence sera égal à la somme des multiples de cette même différence dans les termes ajoutés. Donc la somme des deux termes de la progression arithmétique, répondra au produit des deux termes de même rang dans la progression géométrique. Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 et 24 de la suite arithmétique, lesquels répondent à 9 et 729 de la suite géométrique, on a pour somme 32 qui répond à 6561 produit de 9 par 729.

On déduit de là cette propriété importante : *en ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit; ou, en d'autres termes, le logarithme du produit est la somme des logarithmes des facteurs.*

Ainsi, pour faire une multiplication par logarithmes, on ajoutera le logarithme du multiplicande avec celui du multiplicateur, et cherchant cette somme de logarithmes dans les tables et dans la colonne intitulée logarithmes, on trouvera en regard et dans la colonne des nombres, le produit en question.

Que l'on se propose de multiplier 14 par 13 : en cherchant 14 et 13 dans la colonne des nombres, on trouve en regard et dans la colonne des logarithmes,

$$\begin{array}{rl} (*)\ \log.\ 14 = & 1,146128 \\ \log.\ 13 = & \underline{1,113943} \\ \text{somme} = & 2,260071 \end{array}$$

cette somme répond dans la même table au nombre 182 $= 14 \times 13$.

Pour carrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme, puisque, suivant la propriété ci-dessus, il faudrait ajouter le logarithme du nombre à lui-même. Le cube d'un nombre étant le produit du carré par la racine, le logarithme du cube sera la somme du logarithme du carré et de celui du nombre, c'est-à-dire, le triple du logarithme du nombre. On prouvera de même que le logarithme de la puissance quatrième, cinquième, etc. d'un nombre, est le quadruple, le quintuple, etc. du logarithme de ce nombre.

Généralement donc, *le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre, est le logarithme de ce nombre, multiplié par le degré ou par l'indice de la puissance à former.*

Ainsi le logarithme de 10 étant 1, le quadruple sera 4, logarithme de 10000 qui, en effet, est la quatrième puissance de 10.

Passons à la division, et supposons qu'elle se fasse exactement. Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, le logarithme du dividende est donc la somme des logarithmes du diviseur et du quotient, c'est-à-dire, qu'on a cette égalité

$$\log.\ D = \log.\ d + \log.\ q,$$

D désignant un dividende, d le diviseur et q le quotient : si de chacun des membres on retranche log. d, on aura

$$\log.\ D - \log.\ d = \log.\ q.$$

(*) Log. étant une abréviation du mot logarithme.

Donc le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur.

Par exemple, pour diviser 187 par 17, on cherchera dans les tables, les logarithmes de ces nombres qui sont

$$\begin{array}{ll} \log.\ 187 = & 2,271842 \\ \log.\ \ \ 17 = & 1,230449 \\ \hline \text{diff.} \quad\ = & 1,041393 \end{array}$$

logarithme qui répond à 11 quotient de 187 par 17.

Nous dirons bientôt comment on doit s'y prendre, lorsque la division ne se fait plus exactement, auquel cas le logarithme différence, ou la différence des logarithmes ne se trouve plus dans les tables.

C'est particulièrement dans l'extraction des racines qu'on peut apprécier tout l'avantage qui résulte de la substitution des logarithmes aux nombres. De ce que le logarithme du carré est double de celui de la racine, le logarithme du cube est triple de celui de la racine cubique, et, en général, de ce que le logarithme de la puissance du degré m d'un nombre, est m fois le logarithme de ce nombre, on doit conclure réciproquement que, *pour obtenir le logarithme de la racine d'un certain ordre d'un nombre donné, il faut diviser le logarithme du nombre par l'ordre ou l'indice de la racine.*

Qu'il s'agisse de trouver la racine septième de 128 : ce nombre a pour logarithme 2,107210 dont le septième est 0,301030, logarithme de 2 qui est, en effet, la racine septième de 128.

De l'usage des Tables de Logarithmes.

(128) Les tables de logarithmes servent à résoudre ces deux problèmes.

1.° *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

2.° *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant.*

Occupons-nous du premier : le nombre donné peut être un de ceux consignés dans les tables qui ne contiennent que des nombres entiers; ou il peut tomber entre deux nombres des tables, ce qui arrive lorsqu'il est fractionnaire ou décimal; ou il peut n'être pas contenu entre les limites des tables, parce qu'il est plus grand que l'une de ces limites, ou plus petit que l'autre. On a donc trois cas à distinguer.

1.er *Cas.* Lorsque le nombre donné est l'un de ceux des tables, on trouve son logarithme en regard du nombre (124).

2.e *Cas.* Soit le nombre donné plus grand que le plus grand nombre des tables, que je suppose être 10000, et qu'il s'agisse, par exemple, d'assigner le logarithme du nombre 21598 que nous désignerons par log. 21598 : après avoir mis ce nombre sous la forme $10 \times 2159{,}8$, on cherchera dans les tables log. 2159, qui est 3,33425, en supposant des tables qui ne donnent les logarithmes qu'avec cinq décimales : il s'agit donc de trouver ce qu'on doit ajouter à ce logarithme pour 0, 8 d'augmentation dans le nombre 2159 : à cet effet, ayant trouvé que log. 2160, lequel est 3,33445, surpasse log. 2159 de 0,00020, on dira : si pour une unité d'augmentation dans le nombre 2159, le log. 2159 se trouve augmenté de 0,00020, de combien pour 0, 8 d'augmentation dans le nombre, log. 2159 sera-t-il augmenté? On a donc cette proportion

$1 : 0{,}00020 = 0{,}8 : x$; d'où $x = 0{,}8 \times 0{,}00020 = 0{,}00016$: ajoutant cette correction à 3,33425 logarithme de 2159, on a pour somme 3,33441 logarithme de 2159,8 : mais comme le logarithme du produit $10 \times 2159{,}8$, est la somme des logarithmes des facteurs, il faut à 3,33441 ajouter log. 10 qui est 1, ce qui donne 4,33441 = log. 21598.

3.e *Cas.* Pour obtenir le logarithme d'un nombre fractionnaire plus grand que l'unité, il suffit, conformément à la règle (127) de retrancher le logarithme du

dénominateur de celui du numérateur; la différence est le logarithme du quotient. Ainsi

$$\log.\left(\frac{3549}{25}\right) = \log.\ 3549 - \log.\ 25 = 2{,}15217$$

dont on trouvera le nombre correspondant, comme nous le dirons bientôt. Si l'on demandait le logarithme de $7 + \frac{3}{11}$, on reduirait l'entier au dénominateur 11, et on aurait à prendre $\log.\left(\frac{80}{11}\right) = \log.\ 80 - \log.\ 11.$

4.ᵉ *Cas.* Trouver le logarithme d'une fraction vraie, c'est-à-dire, d'une fraction comprise entre 0 et 1 : soit la fraction $\frac{25}{3549}$: il faut toujours, conformément à la règle, retrancher le logarithme du dénominateur de celui du numérateur, c'est-à-dire, retrancher 3,55011 de 1,39794, ce qui est impossible, puisque le nombre à soustraire est le plus grand; mais on peut, au moins, opérer la soustraction des parties décimales des logarithmes comme on le voit ici

de . . , 39794
ôter . , 55011
diff. = , 84783.

Maintenant, en passant à la soustraction des caractéristiques, on se rappellera qu'à cause de l'emprunt fait pour opérer la soustraction des dixièmes, on a la caractéristique 3 à retrancher de la caractéristique 0, ce qu'on ne peut faire, et alors on se borne à indiquer cette soustraction, en écrivant —3 (*): ainsi la différence serait —3,84783;

(*) Oter 7 de 3, revient à soustraire successivement 3 et 4 de 3; mais 3 ôté de 3 donne le reste 0, et il reste 4 à soustraire de zéro : cette soustraction de 4 qui reste à faire, se note par —4; en sorte que le signe — sert à rappeler que le nombre 4, s'il doit entrer dans une nou-

mais pour qu'on ne soit pas induit en erreur par ce signe — qui paraît affecter la totalité de la différence, tandis qu'il ne porte que sur la caractéristique 3, on écrira le signe — au-dessus de 3 en cette manière : $\bar{3},84783$ qui rappelle que la caractéristique seule est négative ou soustractive : on pourrait encore, d'après la convention ci-dessus, retrancher le plus petit logarithme du plus grand, et affecter la totalité de la différence du signe —, ce qui donnerait — 2,15217. Nous verrons bientôt comment on peut trouver le nombre correspondant aux logarithmes à caractéristiques soustractives.

5.ᵉ *Cas.* Trouver le logarithme d'un nombre décimal plus grand que l'unité. Soit le nombre 21,598 : on fera abstraction de la virgule, et on cherchera le logarithme de 21598 qui est 4,33441 ; mais comme le nombre proposé $21,598 = \frac{21598}{1000}$, il faudra donc du logarithme 4,33441 retrancher celui de 1000 qui est 3, soustraction qui ne porte que sur la caractéristique, et on trouve log. 21,598 = 1,33441. On voit donc qu'il faut chercher le logarithme, ou plutôt la partie décimale du logarithme

velle combinaison de nombres, y entrera soustractivement. Pour nous faire mieux entendre, soit le système d'opération 4 — 7 + 6 : on peut 1.° ajouter 6 à 4, ce qui donne 10, d'où retranchant 7, il reste 3 ; 2.° de 4 retrancher 7, ce qui donne le reste —3 qui doit être combiné soustractivement avec 6, c'est-à-dire, être retranché de 6, d'où résulte le même reste 3 ; 3.° retrancher 7 de 6, d'où résulte — 1 qui doit être combiné soustractivement avec 4, ou retranché de 4 ; le reste est encore 3. Lors donc qu'on a un nombre à retrancher d'un plus petit, il faut retrancher le plus petit du plus grand, et affecter le reste ou la différence du signe — ; ainsi au lieu de retrancher, suivant l'énoncé, 7 de 3, on ôtera 3 de 7, ce qui donne le reste 4 qu'on fera précéder du signe —, et on aura —4. Ces sortes de nombres précédés du signe —, sont dits *négatifs* ou *soustractifs :* les nombres tels que 2, 8, 26, etc., sans signe, sont dits *absolus.*

du nombre regardé comme entier, et lui donner pour caractéristique autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre, ou dans celle qui est à gauche de la virgule (125).

6.ᵉ *Cas.* Trouver le logarithme d'un nombre décimal compris entre 0 et 1. Soit le nombre 0,000456 : ce nombre $= \frac{456}{100000}$; donc

$$\log. 0{,}000456 = \log. 456 - \log. 1000000 = 2{,}65896 - 6$$
$$= 2{,}65896 - 6{,}00000 :$$

on est encore ramené à retrancher un plus grand nombre d'un plus petit; mais comme on peut soustraire la partie décimale du second logarithme de celle du premier, soustraction qui donne 65896, il ne reste plus qu'à retrancher 6 de 2. Or, d'après ce qui a été dit plus haut on a le reste -4 : ou plutôt $\bar{4}$; en sorte que la différence sera $\bar{4}{,}65896$. Il est essentiel de remarquer que la caractéristique 4, considérée abstraction faite du signe —, donne par le nombre de ses unités, le rang du premier chiffre significatif 4, à droite de la virgule, dans le nombre 0,000456, et que d'ailleurs la partie décimale du logarithme, est exactement la même que si le nombre était entier. On peut reconnaître la légitimité de ces conclusions sur un second exemple. Soit le nombre 0,0000002 $= \frac{2}{10000000}$: on a

$$\log. 0{,}0000002 = \log. 2 - \log. 10000000$$
$$= 0{,}301030 - 7 = \bar{7}{,}301030.$$

Ici la caractéristique, prise abstraction faite du signe —, est 7, et, en effet, le chiffre significatif 2 qui est le premier, occupe le septième rang à droite de la virgule. On aurait pu dans ces deux exemples, comme on l'a fait plus haut dans le cas d'une fraction vraie, retrancher le plus petit logarithme du plus grand, et affecter la to-

talité de la différence du signe — ; mais il vaut mieux opérer de l'autre manière (*).

Avant de passer au second problème, nous observerons que le calcul des logarithmes se réduit à celui des logarithmes des nombres premiers, ce qui diminue de beaucoup le travail des tables. En effet, tout nombre composé pouvant être décomposé (77) en facteurs nombres premiers, son logarithme est la somme des logarithmes de ses facteurs.

Nous passerons au second problème qui, comme le premier, offre plusieurs cas à distinguer.

1.er *Cas.* Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient. Je suppose que le logarithme donné soit dans les tables : on en trouve la partie décimale dans la colonne intitulée *log.*, et vis-à-vis, à gauche, dans la colonne intitulée *nombres*, on rencontre le nombre correspondant. On trouve de cette manière que le logarithme 3,56573 appartient au nombre 3679. Nous ferons ici une observation essentielle. On sait que les logarithmes de deux nombres décuples l'un de l'autre, ne diffèrent que par la caractéristique, c'est-à-dire, qu'ils ont même partie décimale; d'où il suit que la partie décimale d'un logarithme répond à une infinité de nombres : ainsi, par exemple, 0,301030 étant le logarithme de 2, les logarithmes de 20, de 200, de 2000, de 20000, etc. ne diffèrent de celui de 2 que par la seule caractéristique, laquelle étant donnée en même temps que le logarithme, lève toute difficulté. D'après cela, le logarithme donné étant 2,301030, on cherche dans la colonne des logarithmes la partie décimale 301030, et en face, dans la colonne des nombres, on trouve 2, ou 20, ou 200, ou 2000, ou

(*) Nous ne parlerons pas ici des *complémens arithmétiques* dont on fait ordinairement usage dans le cas où le logarithme à soustraire est le plus grand, parce que leur emploi a l'inconvénient d'exiger des corrections continuelles, et conséquemment de la part du calculateur une trop grande attention.

20000, ou etc. Mais la caractéristique 2 indiquant que le nombre ne doit avoir que trois chiffres, on prendra 200. Dans les tables de *Callet*, qui sont les plus commodes et les plus répandues, tous les nombres ont six et même jusqu'à sept chiffres, en sorte qu'on trouve 20000 pour le nombre correspondant à 301030, et suivant que le caractéristique du logarithme est 0, 1, 2, 3, 4, on conclut que le nombre correspondant est 2, 20, 200, etc.

2.e *Cas.* Je suppose que la partie décimale du logarithme donné, tombe entre deux logarithmes consécutifs des tables. Soit, par exemple, le logarithme 3,33441 : on cherchera dans la colonne des logarithmes, les deux logarithmes entre lesquels tombe le proposé, logarithmes qui sont 3,33425 et 3,33445; la différence entre ces logarithmes est 0,00020 : on prendra ensuite la différence entre le logarithme donné 3,33441, et le logarithme tabulaire immédiatement plus petit 3,33425 : cette différence est 0,00016; puis on dira : puisque la différence 0,00020 répond à une unité d'augmentation dans le nombre donné par le plus petit des logarithmes entre lequel tombe le logarithme donné, la différence 0,00016 répondra à l'augmentation que doit éprouver le nombre du plus petit logarithme 3,33425, pour devenir celui du logarithme donné : on a donc cette proportion

$$0,00020 : 1 = 0,00016 : x, \text{ d'où } x = 0,8$$

correction à faire au nombre 2159 qui répond au plus petit des deux logarithmes tabulaires, d'où il suit que le nombre cherché est 2159,8. Si le logarithme donné était 1,33441 qui ne diffère du précédent que par la caractéristique, on opèrerait exactement de la même manière, puis conformément à la caractéristique 1, on détacherait par une virgule deux chiffres à gauche dans le nombre 21598 qui devient 21,598. Il ne faut pas perdre de vue que la partie décimale d'un logarithme fait découvrir les chiffres du nombre, et que la caractéristique fait connaître le nombre des

chiffres dont se compose la partie entière de ce nombre. Les exemples suivans lèveront toute difficulté. Soit le logarithme 7,56573 : la partie décimale 56573 ferait trouver le nombre 3679, et la caractéristique 7 apprend que ce nombre doit avoir 8 chiffres dans la partie entière; il sera donc 36790000. Soit en second lieu, le logarithme 5,33441 : la partie décimale 33441 fera trouver, comme nous l'avons vu plus haut, le nombre 2159,8, et la caractéristique 5 avertit que ce nombre doit avoir six chiffres dans la partie entière; il sera donc 215980. Soit enfin le logarithme 4,79772 : sa partie décimale 79772 donne le nombre 62766, et d'après la caractéristique 4, ce nombre devient 62766.

3.e *Cas.* Etant donné un logarithme à caractéristique négative, trouver le nombre correspondant. Soit d'abord le logarithme $\bar{4}$,65896 : la partie décimale 65896 fera trouver le nombre 456; mais on sait que la caractéristique $\bar{4}$ indique que le nombre qui répond au logarithme, est décimal, et que le premier chiffre 4 doit occuper la quatrième place à droite de la virgule : ce nombre sera donc 0,000456. En effet, $0,000456 = \frac{456}{100\,00\,00}$; donc log. 0,000456 $=$ log. 456 — log. 1000000 $=$ 2,65896 — 6,00000 $= \bar{4}$,65896. On observera que le logarithme d'une fraction vraie est affecté d'une caractéristique négative, ainsi que celui d'une fraction décimale entre 0 et 1, ce qui doit être, puisqu'une telle fraction est convertible en une fraction décimale entre 0 et 1 (*Chap.* VII). Or, lorsqu'il s'agit de revenir d'un tel logarithme au nombre correspondant, les tables font connaître, non pas la fraction ordinaire, mais sa valeur décimale approchée.

Au reste, on trouve toujours en tête des tables de logarithmes une instruction détaillée sur la manière de s'en servir, et dans laquelle on traite tous les cas que nous venons de distinguer, et beaucoup d'autres que les bornes et la nature de cet ouvrage nous forcent de supprimer.

Nous pouvons maintenant donner quelques exemples d'extraction de racines.

Soit, en premier lieu, à extraire la racine carrée de 2 : on a log. 2 = 0,301030 : or, le logarithme de la racine étant la moitié de celui du carré (127), il faudra prendre $\frac{1}{2}$ log. 2, moitié qui est 0,150515, et qui répond à 1,4142; de sorte qu'on a ainsi la racine carrée approchée à moins d'un dix-millième, laquelle ne s'obtiendrait que difficilement par les règles (91).

Qu'on ait, en second lieu, à extraire la racine carrée du nombre décimal 0,000456 : on sait (2.e *Prob.*, 3.e *Cas*) que ce nombre a pour logarithme $\overline{4}$,65896 dont il faut prendre la moitié. A cet effet, on prendra d'abord la moitié de la caractéristique $\overline{4}$ ou -4, et on aura -2 : puis on prendra la moitié de la fraction décimale, laquelle est 32948, en sorte que

$$\tfrac{1}{2}\ \text{log. } 0{,}000456 = \overline{2}{,}32948$$

qui répond à 0,0021354, racine carrée de 0,000456, exacte jusques dans la septième décimale.

Qu'on ait, en troisième lieu, à extraire la racine cubique de 0,000456 : on sait que le logarithme de cette racine est le tiers du logarithme du nombre, c'est-à-dire, le tiers de $\overline{4}$,65896; or, ici la caractéristique $\overline{4}$ ou -4, n'est pas divisible exactement par 3; mais on peut la ramener à être divisible, en lui ajoutant -2, et afin que le logarithme ne soit pas altéré, on le mettra sous la forme

$$-6 + 2{,}65896$$

$-6+2$ étant la caractéristique qui revient évidemment à -4 ou $\overline{4}$. On dira alors le tiers de -6 est -2, puis on prendra de la manière accoutumée le tiers de 2,65896 qui est 0,88632, en sorte que le logarithme de la racine cubique, est $\overline{4}$,88632 : le nombre correspondant est 0,00076969 racine cubique cherchée.

Soit, en dernier lieu, à assigner la racine septième de

la fraction $\frac{25}{3549}$: on a trouvé précédemment $\bar{3},84783$ pour logarithme de cette fraction; il faut maintenant en prendre le septième : à cet effet, et pour rendre la caractéristique $\bar{3}$ ou -3 exactement divisible par 7, on lui ajoutera -4 et 4, ce qui revient à retrancher et à ajouter 4 : on aura ainsi

$$\bar{7} + 4,84783$$

dont le septième est $\bar{1}$, 69254 qui répond à 0,49233 : racine septième cherchée.

Si l'on voulait élever la fraction $\frac{25}{3549}$ à la septième puissance, il faudrait (127) multiplier son logarithme $\bar{3},84783$ par l'indice 7 de la puissance : or, en opérant sur la fraction décimale, on aurait 5,93481 ; mais 7 fois la caractéristique -3 donne -21, en observant que par -3 à prendre 7 fois, il faut entendre 3×7 ou 21 à retrancher, c'est-à-dire, -21 ; ainsi, la caractéristique sera $-21 + 5$, ou -16, ou bien encore $\overline{16}$. Le logarithme de la septième puissance sera donc $\overline{16},93481$ dont la caractéristique montre que le premier chiffre significatif occupera la 16.e place à la droite de la virgule ; c'est ce dont on s'assurera en faisant la septième puissance de 0,007 qui est la valeur décimale approchée de la fraction $\frac{25}{3549}$.

C'est au moyen de ces caractéristiques négatives qui ne peuvent laisser actuellement aucune difficulté, qu'on évite les complémens arithmétiques dont nous avons parlé dans la note (*pag.* 18). Les exemples que nous venons de traiter, et qu'il importe de multiplier, ne laisseront aucun doute sur l'immense avantage qu'offre l'emploi des logarithmes dans l'extraction des racines.



CHAPITRE XII.

De la Règle de fausse position avec des applications; des Questions d'annuités.

Introduction à la Règle de fausse position.

(129) Nous avons distingué deux espèces de progressions arithmétiques, l'une croissante, et l'autre décroissante : dans la première, *la raison* ou *la différence constante* est dite *additive*, parce qu'elle s'ajoute à un terme pour avoir le suivant ; dans la seconde, elle est dite *soustractive*, parce qu'au contraire, il faut la retrancher du terme qui précède pour avoir le terme qui suit.

Soit, par exemple, la progression

29 . 25 . 21 . 17 . 13 . etc.;

la différence constante, savoir 4, est soustractive : si on continue la suite vers la droite par des soustractions successives de ce nombre 4, on arrivera au terme 1 : si de 1 on retranche 4, on aura (*note*, *pag.* 216 et 217) le reste —3 ; si de —3 on retranche 4, on aura —7, et ainsi de suite ; en observant que retrancher un nombre d'un autre nombre qui est déjà sous le signe de la soustraction, ou dont on a déjà indiqué la soustraction, revient à retrancher la somme des deux nombres (*) : en sorte que la

(*) En effet, que de 11 on ait à retrancher d'abord 3, et ensuite 4, c'est comme si de 11 on avait à retrancher 7, ce qui se note de cette manière :

progression prolongée vers la droite, se continuera au-dessous de l'unité par des termes soustractifs en cette manière :

29 . 25 . 21 . 17 . 13 . 9 . 5 . 1 . — 3 . — 7 — etc.

Il peut arriver que le passage des termes *absolus* aux *soustractifs* se fasse par zéro, comme on le voit par la progression suivante

6 . 4 . 2 . 0 . — 2 . — 4 . — 6 . — etc.

Il importe de remarquer qu'on peut comparer chacun des termes de la progression, à l'un quelconque d'entr'eux. En effet, si dans la progression

29. 25. 21. 17. 13. 9. 5. 1. — 3. — 7. —, etc.,

on prend 13, par exemple, pour terme de comparaison, le terme —7 sera égal à 13 moins cinq fois la différence constante 4, c'est-à-dire, à 13 — 20 = —7, et le terme 29 est égal à 13 plus quatre fois la différence constante 4 (114). Nous conviendrons de donner zéro pour indice au terme auquel on compare ainsi tous les autres, d'affecter les termes suivans et à droite des indices successifs 1, 2, 3.... et les termes à gauche des indices —1, —2, —3 — etc. : en sorte que 0 séparera les indices *absolus* 1, 2... des indices *négatifs* ou *soustractifs* —1, — 2..... Il résulte de ces conventions que vers la droite du terme qui a zéro pour indice, l'indice d'un terme quelconque, est le rang du précédent; d'où il suit que cet indice compte le nombre des termes qui précèdent celui qu'on considère, y compris celui de l'indice zéro : la même observation s'applique à un terme quelconque situé à gauche du terme de départ. On peut donc dire *qu'un terme quelconque est égal à celui de l'in-*

---

11 — 7; mais on peut aussi indiquer les deux soustractions successives, en écrivant 11 — 3 — 4. Le rapprochement de ces deux résultats, montre clairement que — 7 revient à — 3 — 4.

dice zéro, plus ou moins la différence constante multipliée par l'indice même du terme qu'on considère, sans égard au signe de l'indice facteur, le plus se rapportant au cas de la progression croissante, et le moins à celui de la progression décroissante.

Soient les progressions

indices	0	1	2	3	4	5	6	7	8, etc.
nombres	7	10	13	16	19	22	25	28	31, etc.

Pour avoir l'indice d'un terme quelconque donné, par exemple, du terme 31, on prendra la différence .... $31 - 7 = 24$, laquelle divisée par la différence constante 3, donne pour quotient 8, indice cherché du terme 31. En effet, si l'on désigne l'indice inconnu par x, on sait (114) que $31 = 7 + 3 \times x$;
retranchant 7 de part et d'autre, ce qui donne

$$31 - 7 = 3x,$$

puis divisant par 3, il vient

$$x = \frac{31 - 7}{3} = 8.$$

Que l'on demande l'indice qui répond au nombre 30: en appliquant le procédé ci-dessus à la recherche de cet indice, on aurait

$$x = \frac{30 - 7}{3} = 7 + \frac{2}{3};$$

d'où on conclura que le terme 30 est placé aux deux tiers de l'intervalle entre le huitième terme 28 et le neuvième 31.

Soient, en second lieu,

indices	0	1	2	3	4	5	6	7	8, etc.
nombres	7	3	− 1	− 5	− 9	− 13	− 17	− 21	− 25, etc.

la différence constante 4 étant soustractive: si l'on désigne par x l'indice du terme 25, on aura

$$-25 = 7 - 4x:$$

ajoutant $4x$ de part et d'autre, il vient

$$4x - 25 = 7 - 4x + 4x = 7,$$

ajoutant encore 25 de part et d'autre, on trouve .... $4x = 25 + 7$: enfin divisant par 4, on a

$$x = \frac{25 + 7}{4} = 8$$

qui est le rang du terme -25.

Soient, en troisième lieu,

indices	-4	-3	-2	-1	o, etc.
nombres	11	9	7	5	3, etc.

et cherchons l'indice x du terme 11. La différence constante et additive étant 2, en allant du terme 3 vers le terme 11, on a

$$11 = 3 + 2x, \text{ d'où } x = \frac{11 - 3}{2} = 4;$$

comme rien n'indique si les termes 5, 7, 9, 11 sont situés à gauche ou à droite du terme 3 ayant o pour indice, on ne peut trouver que la valeur absolue de l'indice cherché. Mais si l'on savait d'avance que l'indice x doit être soustractif, il faudrait au lieu de $11 = 3 + 2x$, écrire

$$11 = 3 - 2x, \text{ d'où } 2x = 3 - 11 = -8,$$

en ajoutant $2x$ des deux côtés, et retranchant 11 de part et d'autre : divisant enfin de part et d'autre par 2 (*), on obtient $x = -4$ qui est, en effet, l'indice qui répond à 11.

Soient maintenant 67 et 32 deux termes d'une progression arithmétique décroissante, qui répondent aux indices 11 et 18 : on propose de trouver la différence constante de la suite. On peut ramener l'indice du terme 67 à zéro, en le diminuant de 11 ; mais il faudra pareillement diminuer de 11 l'indice 18 du terme 32 : en sorte qu'aux indices 11 et 18, il est permis de substituer

(*) Il est évident que la moitié de 8 retranché est 4 retranché, ce qui revient à dire que la moitié de -8 est -4 : ou plutôt -4 et -4 donnant -8, comme on l'a vu plus haut, il s'ensuit que -8 est le double de -4 qui, réciproquement, est la moitié de -8.

o et 7 dont la différence 7 est la même que celle de 18 à 11. On aura donc, en désignant la différence constante et soustractive par y,

$$32 = 67 - 7y$$

ajoutant $7y$ de part et d'autre, retranchant 32 et divisant par 7, on aura

$$y = \frac{67 - 32}{7} = \frac{67 - 32}{18 - 11} = 5.$$

Il faut donc diviser le plus grand terme moins le plus petit, par le plus grand indice moins le plus petit. Cette conclusion resterait encore la même, si à l'indice 11 répondait le terme 32, et à l'indice 18 le terme 67, auquel cas, la progression étant croissante, et conséquemment la différence additive, on aurait

$$67 = 32 + 7y;$$

retranchant 32 de part et d'autre, puis divisant par 7 ou par 18 — 11, on aurait encore

$$y = \frac{67 - 32}{18 - 11} = 5.$$

On pourrait, dans ces deux cas, chercher l'indice du second terme, connaissant la différence constante. Dans le premier, par exemple, en désignant par x l'indice inconnu du terme 32, et observant que la différence constante 5 est soustractive, on aura

$$32 = 67 - 5x, \text{ d'où } 5x = 67 - 32:$$

après avoir ajouté $5x$ et retranché 32 de part et d'autre; puis divisant par 5, on a

$$x = \frac{67 - 32}{5} = 7;$$

ce nombre 7 ajouté à 11, donne 18 pour l'indice demandé.

Nous allons résoudre la question suivante à laquelle se ramène la règle de fausse position.

Étant donnés deux termes quelconques d'une progression

arithmétique et leurs indices respectifs, trouver à quel indice répond le terme o *de la progression?*

Supposons, par exemple,

qu'aux indices 5   14
répondent 65   20

il s'agit de trouver l'indice du terme o de la progression : si on connaissait la différence constante de la progression, on saurait combien de fois on doit la retrancher de 20 pour avoir zéro, et on conclurait qu'il faut ajouter autant de fois l'unité à 14 pour avoir l'indice cherché, puisque le terme zéro est à la droite de 20. On a vu plus haut qu'en désignant par y la différence cherchée, on a

$$y = \frac{65 - 20}{14 - 5} = \frac{45}{9} = 5:$$

or, en divisant 20 par 5, on a pour quotient 4 qui indique que de 20 il faut retrancher 4 fois cette différence 5 pour avoir le terme zéro : l'indice cherché est donc $14 + 4 = 18$. On a donc divisé 20 par 5 ou par $\frac{65 - 20}{14 - 5}$, ce qui revient (73) à $\frac{20\,(14 - 5)}{65 - 20}$, et au résultat 4 on a ajouté 14, en sorte que l'indice cherché est donné par le système d'opérations

$$\frac{20\,(14 - 5)}{65 - 20} + 14$$

multipliant 20 par 14, puis 20 par 5, et retranchant le second produit du premier, on trouve

$$\frac{20 \times 14 - 20 \times 5}{65 - 20} + 14:$$

si maintenant on réduit 14 au dénominateur $65 - 20$, ce qui se fait en multipliant 14 par 65, puis 14 par 20, et retranchant le second produit du premier, on aura, en observant que les deux fractions ont même dénominateur,

$$\frac{20 \times 14 - 20 \times 5 + 14 \times 65 - 14 \times 20}{65 - 20}$$

or, $20 \times 14 - 14 \times 20 = 0$; donc cette fraction revient à

$$\frac{14 \times 65 - 20 + 5}{65 - 20}.$$

En répétant le même raisonnement sur deux autres nombres quelconques que nous désignerons par a et b, auxquels répondent respectivement les indices h et k, savoir, l'indice h au nombre a, et l'indice k au nombre b, et supposant que x soit l'indice qui répond au terme o de la progression arithmétique, on sera conduit à

$$x = \frac{a \times k - b \times h}{a - b},$$

le nombre a étant plus grand que b, et l'indice h plus petit que k, hypothèses conformes à celles que nous avons faites dans l'exemple précédent.

On est donc conduit à cette règle : *multipliez chacun des deux termes par l'indice de l'autre ; retranchez le plus petit produit du plus grand, et divisez cette différence par le plus grand terme moins le plus petit : le quotient de cette division sera l'indice auquel répond le terme zéro.*

Il ne faut pas oublier que cette règle suppose la progression décroissante, le plus petit indice répondant au plus grand terme, le plus grand indice au plus petit, et les deux termes donnés étant *positifs* ou *absolus*.

Souvent et même dans le plus grand nombre de cas, la règle donnera un indice fractionnaire : d'où il faudra conclure que le terme zéro n'est pas un de ceux de la progression. Par exemple, la progression étant telle qu'aux

indices 9 16
répondent . . . . . 47 . . . . . 19;

on aura, d'après la règle,

$$x = \frac{47 \times 16 - 19 \times 9}{47 - 19} = \frac{581}{28} = 20 + \frac{3}{4},$$

mais en divisant la différence $47 - 19 = 28$ par $16 - 9 = 7$, on trouve la différence constante 4. On voit donc qu'aux

indices	16	17	18	19	20	21, etc.
répondent	19	15	11	7	3	—1, etc.

et qu'ainsi le terme o de la suite inférieure, compris entre 3 et —1, est aux trois quarts de la distance entre les termes 3 et —1, puisque son indice $20\frac{3}{4}$ est aux trois quarts de la distance de 20 à 21.

Parcourons les différens cas qui paraissent échapper à la règle ci-dessus. Supposons qu'aux

indices 26 78
répondent 35 . . . . —30,

le second terme 30 étant soustractif : l'application de la règle donnerait pour l'indice du terme qui répond au zéro de la progression arithmétique,

$$x = \frac{35 \times 78 - (-30 \times 26)}{35 - (-50)};$$

or, $35 \times 78 = 2730$; d'autre part le produit (-30×26) est -780, en observant qu'un nombre soustractif répété un certain nombre de fois, donne un produit aussi soustractif, et le même quant au nombre de ses unités que celui de 30×26 dans cet exemple : il faut maintenant retrancher -780 de 2730 : le résultat est $2730 + 780 = 3510$ (*) : de même $35 - (-30) = 35 + 30 = 65$: la division de 3510 par 65 donne le quotient 54, indice du terme o de la progression arithmétique. En effet, on trouvera facilement que la différence constante est $-\frac{65}{52}$: d'ailleurs, l'indice du terme o étant 54, ce terme, par rapport au pre-

(*) C'est ce qu'on peut démontrer en partant d'une propriété connue, savoir, que le reste d'une soustraction, ajouté au nombre soustrait, doit donner pour somme le nombre dont on soustrait. Supposons donc qu'on ait

de 7
à ôter .... —3
reste = ... $\overline{7 + 3}$

et, en effet, $7 + 3 - 3 = 7$, parce que le même nombre 3 est ajouté et soustrait. On voit donc que soustraire —3 de 7 revient à ajouter 3 à 7, raisonnement qui s'applique à tous les cas analogues.

mier, est du rang $54 - 26 = 28$: or, la différence constante $-\frac{65}{52}$ prise 28 fois, est -35 qui ajouté au premier terme 35, donne o.

Supposons, en second lieu, qu'aux

indices	6	7	8	9	10	11
répondent	—20	—16	—12	—8	— 4	0

la différence constante additive étant 4, et supposons de plus qu'étant donnés les nombres -20, -12 auxquels répondent les indices 6 et 8, on demande l'indice du terme o qu'on sait être 11 : l'application de la règle donne

$$x = \frac{-20 \times 8 - (-12 \times 6)}{-20 - (-12)}$$

or, $-20 \times 8 = -160$; $-12 \times 6 = -72$; $-160 - (-72) = -160 + 72 = 72 - 160 = -88$ (*notes précéd.*) : le dénominateur $-20 - (-12) = -20 + 12 = 12 - 20 = -8$. Ainsi $x = \frac{-88}{-8}$: or, on démontre, en algèbre, que ce quotient est le même que celui de $\frac{88}{8} = 11$ (*) qui est, en effet, l'indice du terme zéro.

La règle a été déduite de la considération d'une progression arithmétique décroissante : nous en supposerons une croissante et telle qu'aux

indices.	6	7	8	9. . . .
répondent . . .	8	10	12	14. . . .

pour avoir l'indice x du terme o, au moyen des termes 8 et 14 et de leurs indices 6 et 9, on posera, d'après la règle,

$$x = \frac{8 \times 9 - 14 \times 6}{8 - 14} = \frac{-12}{-6} = \frac{12}{6} = 2$$

(*) Il semble d'ailleurs qu'il n'y ait aucune difficulté à concevoir que le nombre soustractif -88, contient le nombre soustractif -8, exactement comme le nombre absolu 88, contient le nombre absolu 8.

Enfin, et pour dernier cas, qu'aux

indices. 3 4

répondent. . . 10 12

l'indice x du terme zéro, sera donné par

$$x = \frac{10\times4-12\times3}{10-12} = \frac{40-36}{-2} = \frac{4}{-2}$$

ce quotient $\frac{4}{-2}$ n'est autre chose que le quotient $\frac{4}{2}$, pris soustractivement, proposition démontrée (*Alg.*) (*): ainsi l'indice cherché est -2, ce dont on s'assurera en prolongeant vers la gauche la progression des nombres, par la soustraction continuelle de 2, et celle des indices, par la soustraction continuelle d'une unité.

Règle de fausse position.

La règle de fausse position est une méthode ingénieuse au moyen de laquelle on résout, sans employer le calcul littéral, les problèmes déterminés à une seule inconnue, et plus particulièrement ceux qui n'admettent qu'une solution et qu'on nomme du *premier degré*; parce que l'inconnue n'y est élevée qu'à la première puissance. Ces sortes de questions rentrent dans cet énoncé général : *trouver un nombre tel que si on le multiplie par un nombre donné* a, *et qu'on augmente ou qu'on diminue ce produit, d'un nombre donné* b, *la somme ou la différence soit égale à zéro.* En traduisant les deux cas de cet énoncé, on est conduit aux deux *équations*

(1) . . . . $ax + b = 0$; $ax - b = 0$, ... (2)

(*) Ayant reconnu précédemment (*note*) que le quotient de $\frac{-4}{-2}$ est 2, c'est-à-dire, le même que celui de $\frac{4}{2}$, il paraît naturel de conclure que celui de $\frac{-4}{2}$ ainsi que de $\frac{4}{-2}$ ne devant différer du précédent que par le signe, doit être -2.

où l'inconnne x qui est la représentation d'un nombre à découvrir, n'est qu'à la première puissance. On appelle *valeur* de l'inconnne ou *racine* de l'équation, le nombre qu'il faut substituer pour x, à l'effet d'obtenir un résultat zéro, c'est-à-dire, à l'effet de satisfaire à l'équation ou à la condition énoncée entre x et les nombres connus a et b. Soient, par exemple, $a = 2$, $b = 6$ dans l'équation (2): elle se changera dans la suivante

$$2x - 6 = 0, \text{ d'où } x - 3 = 0,$$

en divisant chacun des membres par 2, et observant que le quotient du second membre par 2, est encore zéro: *la valeur* de x est 3, et en effet $3 - 3 = 0$. Pour avoir celle de x dans l'équation (2), on ajoutera b de part et d'autre, ce qui donnera

$$ax = b, \text{ d'où } x = \frac{b}{a},$$

après avoir divisé de part et d'autre par a. En effet, par cette valeur de x, le premier membre de (2) devient

$$\frac{ab}{a} - b = b - b = 0.$$

Supposons maintenant qu'on donne à x dans le premier membre de l'équation (2), une suite de valeurs en progression arithmétique, qui soient, par exemple,

$$x = 0, \quad = 1, \quad = 2, \quad = 3, \quad = 4 \ldots.$$

les valeurs correspondantes du premier membre $ax - b$, savoir

$$-b, \quad a - b, \quad 2a - b, \quad 3a - b, \quad 4a - b \ldots.$$

formeront une progression arithmétique croissante ayant a pour différence constante, et pour indices les valeurs attribuées à x. On a donc déjà cette conclusion remarquable. *Lorsqu'une question est du premier degré, les resultats qu'on obtient, en attribuant à l'inconnue des valeurs en progression arithmétique, forment eux-mêmes une progression arithmétique; et réciproquement, lorsque cette circonstance a lieu, la question est du premier degré.* Il ré-

sulte de là que le terme o de la progression arithmétique des résultats, a pour indice la véritable valeur de l'inconnue. On est donc conduit à cette règle pour découvrir la valeur de l'inconnue dans les questions du premier degré : *supposez à l'inconnue deux valeurs quelconques, c'est-à-dire, prises au hasard, et que nous désignerons par* h *et* k, *et notez les résultats correspondans par* m *et* n *: multipliez, comme on l'a prescrit plus haut, le premier résultat* m *par la seconde hypothèse* k, *et le second résultat* n *par la première hypothèse* h *; puis divisez la différence des produits, savoir,* $m \times k - n \times h$ *par la différence des résultats* $m - n$ *: le quotient sera la vraie valeur de l'inconnue.*

A l'avenir, nous appellerons *fausses positions* les hypothèses faites sur x, pour les distinguer de *la vraie valeur* de x, et nous nommerons *erreurs* les résultats correspondans, parce que le véritable résultat, celui qui est dû à la vraie valeur, devant être zéro, il s'en faut de tout le résultat obtenu qu'on soit tombé sur zéro.

On devra d'abord faire quelques fausses suppositions successives, afin de juger, d'après la marche des erreurs, si la question est du premier degré.

Lors même que la question est d'un degré supérieur au premier, si ayant déjà découvert d'une manière quelconque une valeur assez approchée de l'inconnue, ce qu'on peut toujours faire, au moins par le tâtonnement au défaut des méthodes qui seront exposées dans la suite de ce cours, on suppose à cette inconnue une seconde valeur qui diffère très-peu de la première, on pourra appliquer à ces deux fausses positions et aux erreurs correspondantes, la règle ci-dessus qui fera connaître une troisième valeur de l'inconnue, beaucoup plus approchée que chacune des deux précédentes, et l'erreur correspondante : on prendra de nouveau une valeur très-approchée de cette dernière, et on calculera l'erreur. Appliquant de nouveau la règle en question, on déduira de ces données une nouvelle

valeur plus approchée de la véritable que chacune des précédentes, et ainsi de suite. (*Alg.* Ire *Sect.* XXXII).

1.re Question. *Un père est âgé de 50 ans, le fils en a 12: on demande dans combien d'années, à partir d'aujourd'hui, l'âge du père sera triple de celui du fils?*

C'est sur le nombre inconnu d'années que doivent porter les suppositions. Dans ce moment, ou après 0 ans, le triple de l'âge du fils est 36 ans; l'âge du père est 50, il s'en faut donc de 14 ans que l'âge du père soit triple de celui du fils, ou que l'âge du père moins le triple de celui du fils, soit 0 : l'erreur est 14. Dans un an, le fils aura 13 ans dont le triple est 39; le père aura 51 ans; l'erreur sera 12 ans. En multipliant ces fausses positions, on s'assurerait que les erreurs croissent en progression arithmétique. Ainsi aux

indices 0 1
répondent 14 12

et, d'après la règle,

$$x = \frac{14 \times 1 - 12 \times 0}{14 - 12} = \frac{14}{2} = 7$$

En effet, dans 7 ans, le fils aura 19 ans, dont le triple est 57 ans; et le père en aura pareillement 57.

2.e Question. *En faisant l'aumône à plusieurs pauvres et donnant 3^s^ à chacun, on a 9^s^ de reste; mais si on ne donne à chaque pauvre que 2^s^, on a 12^s^ de reste: on demande combien on a de sous et combien il y a de pauvres?*

On peut prendre pour inconnue le nombre de pauvres, et sa valeur fera connaître celui des sols. Or, suivant l'énoncé, le nombre des sols doit être en même temps égal à trois fois le nombre des pauvres plus 9 sols, et à deux fois le nombre des pauvres plus 12^s^; donc si l'on suppose 0 pauvres, on aura en même temps 9^s^ et 12^s^: il s'en faut donc de 3^s^ que le nombre des sols soit le même; erreur $=$ 3^s^. Si l'on suppose 1 pauvre, on aura en même temps 12^s^ et 14^s^; erreur $=$ 2^s^. On s'assurera

que les erreurs forment une progression arithmétique décroissante. Ainsi puisqu'aux

indices	0	1
répondent	3	2

on a donc, d'après la règle,

$$x = \frac{3 \times 1 - 2 \times 0}{3 - 2} = 3^{p}$$

En effet, le nombre des pauvres étant 3, on aura, comme l'exige l'énoncé, $3 \times 3^s + 9 = 3 \times 2^s + 12^s = 18^s$. On aurait pu, dans cet exemple, et dans le précédent, faire deux fausses positions consécutives quelconques.

3.ᵉ Question. *On propose de partager le nombre 47 en deux parties telles qu'en divisant la plus petite par 3, et la plus grande par 5, les deux quotiens fassent ensemble 11.*

Prenant 0 pour la plus petite des deux parties, la plus grande sera 47: il en résultera les deux quotiens 0 et $\frac{47}{5}$: il s'en faut de $\frac{8}{5}$ ou de $\frac{24}{15}$ que la somme de ces deux quotiens soit 11. Soit maintenant 1 la plus petite des deux parties, la plus grande sera 46, et on aura les deux quotiens $\frac{1}{3}$ et $\frac{46}{5}$ dont la somme $\frac{143}{15}$ ne fait pas 11; l'erreur est de $\frac{22}{15}$. Ainsi aux

indices	0	1
répondent . . .	$\frac{24}{15}$	$\frac{22}{15}$

on aura donc

$$x = \frac{1 \times \frac{24}{15} - 0 \times \frac{22}{15}}{\frac{24}{15} - \frac{22}{15}} = \frac{24}{2} = 12$$

le plus petit des deux nombres étant 12, le plus grand sera 35: les quotiens seront $\frac{12}{3}$ et $\frac{35}{5}$, c'est-à-dire, 4 et 7 dont la somme est effectivement 11.

4.[e] Question. *On a loué un ouvrier paresseux à raison de 45ˢ par chaque jour qu'il travaillerait; mais à condition de lui retenir 12ˢ par chaque jour qu'il ne travaillerait pas : on lui fait son compte au bout de 30 jours, et il arrive qu'on ne lui doit que 39ˢ. On demande combien de jours il a travaillé?*

Supposons que l'ouvrier ait travaillé pendant 0 jours, et qu'ainsi il ait été 30 jours oisif: il lui revient 0ˢ pour les 0 jours de travail, et il doit au contraire 360ˢ pour les 30 jours d'oisiveté; de sorte que le gain de l'ouvrier serait une dette de 360ˢ que nous noterons par — 360ˢ (*): mais il lui revient effectivement 39ˢ; la différence entre ces deux résultats, est donc $-360-39=-399$, erreur due à l'hypothèse. Que l'ouvrier ait travaillé pendant 1 jour, et qu'ainsi il ait été oisif pendant 29 jours: pour ce jour, il recevra 45ˢ; mais pour les 29 autres jours, il devra donner 348ˢ : sa situation sera donc $45^s-348^s=-303^s$; or, elle est réellement 39ˢ; l'erreur ou la différence est donc $-303^s-39^s=-342$. Ainsi aux

indices 0 1
répondent . . . . — 399 . . . . — 342

et, d'après la règle', le nombre des jours de travail, est

$$x=\frac{-399\times 1-(-342\times 0)}{-399-(-342)}$$

$$=\frac{-399}{-399+342}=\frac{-399}{-57}=\frac{399}{57},$$

(*) Par opposition aux biens représentés par des nombres absolus, les dettes deviennent des nombres soustractifs, puisque leur effet est de diminuer les biens : ainsi, par exemple, la fortune réelle d'un homme qui possède 30ᶠ et qui doit 12ᶠ, est $30^f-12^f=18^f$: si la personne n'a que 4ᶠ et qu'elle en doive 12, elle est en dette de 8ᶠ, ce qu'on note par $-8^f=4^f-12^f$: enfin si, ne possédant rien, elle doit 8ᶠ, sa fortune est de moins 8ᶠ, ce qu'on note par -8^f, état qu'on exprime vulgairement en disant *qu'il s'en faut de 8ᶠ qu'elle ait un sou.*

d'après une note précédente : donc $x = 7$ jours. En effet, pour 7 jours de travail, l'ouvrier a reçu 315^s; pour 23 jours d'oisiveté, il a subi une retenue de 276^s; il n'a donc réellement reçu que $315^s - 276^s = 39^s$.

On aurait évité quelques difficultés, en faisant des hypothèses autres que o et 1, par exemple, en supposant $x = 12^s, = 13^s$. On trouve facilement que la première hypothèse donne pour erreur $324^s - 39^s = 285^s$, et que l'erreur due à la seconde, est $381^s - 39^s = 342$: en sorte qu'aux

indices 12 13
répondent . . . . 285 . . . . 342;

d'où résulte

$$x = \frac{285 \times 13 - 342 \times 12}{285 - 342} = \frac{-399}{-57} = \frac{399}{57} = 7;$$

comme ci-dessus.

5.e Question. *On a fait partir de Dreux pour Brest, un courier qui fait 8 kilomètres par heure : huit heures après son départ, on en a fait partir un autre de Paris pour Brest, et celui-ci parcourt 12 kilomètres par heure. On demande où ce second courier rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a 68 kilomètres de Paris à Dreux ?*

Nous appellerons premier courier celui qui part de Dreux, ville intermédiaire entre Paris et Brest, et conséquemment second courier, celui qui part de Paris. Nous prendons pour inconnue x, la distance de Paris au point de rencontre des deux couriers, lequel se trouve entre Dreux et Brest. Supposons $x = 0$: il est clair qu'à cette distance de Paris, les deux couriers ne pourront se rencontrer, puisque l'un d'eux, le second, est encore

(*) Le *kilomètre* est une mesure itinéraire dans le nouveau système métrique français. Pour mieux suivre le raisonnement, on pourra tracer une droite sur laquelle on désignera par les lettres P, D, B et R Paris, Dreux, Brest, et le point de rencontre, en plaçant P et B aux extrémités, D entre P et B, et R entre D et B.

à Paris, et que le premier en est à une distance qui se compose de celle de Paris à Dreux, qui est 68 kil., plus du chemin qu'a fait ce premier courier, à raison de 8 kil. par heure, pendant les 8 heures dont son départ précède celui du second courier, chemin qui est de 64 kil. Ainsi, les deux couriers, au lieu de se rencontrer, sont à une distance l'un de l'autre de 68 kil. + 64 kil. = 132 kil., première erreur. Soit, en second lieu, $x = 1$ kil., ce qui revient à supposer que le second courier est à un kil. de Paris, où il est évidemment impossible qu'il rencontre le premier courier. Calculons la distance qui les sépare alors et qui sera la seconde erreur. Cette distance se compose 1.° de l'intervalle 132 kil. — 1 kil. = 131 kil., plus le chemin fait par le premier courier pendant le temps qu'a mis le second courier à parcourir 1 kil. or, en désignant ce chemin par y, il est clair que y kil. et 1 kil., chemins faits pendant le même temps par le premier et le second courier, seront entr'eux comme 8 kil. et 12 kil., chemins faits par les mêmes couriers en 1 heure; en sorte qu'on aura la proportion

$$12 : 8 = 1 : y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

ainsi la distance cherchée est $131 + \frac{2}{3}$ seconde erreur : conséquemment aux

indices	0	1
répondent	132	$131 + \frac{2}{3}$
ou	$\frac{396}{3}$	$\frac{395}{3}$

Ainsi, la distance cherchée sera, d'après la règle,

$$x = \frac{396 \times 1 - 395 \times 0}{396 - 395} = \frac{396}{1} = 396 \text{ kil.}$$

Il s'agit de vérifier ce résultat. Au moment où le second courier part, le premier courier est à une distance de Paris égale à 68 + 64 kil. = 132 kil. : ainsi, le second courier devant parcourir 396 kil., pendant que le premier en parcourt 396 — 132 = 264 kil., il

faut que ces deux chemins faits dans le même temps, soient dans le rapport des vîtesses 12 kil. et 8 kil. des couriers, c'est-à-dire, des chemins qu'ils font en une heure; et en effet, on a

12 kil. : 8 kil. = 396 : 264

6.e Question. *Les trois héritiers d'une succession la partagent entr'eux de la manière suivante : le premier en prend la moitié moins 1000 francs ; le second en prend le tiers moins 800 francs ; le troisième en prend le quart moins 600 francs : on demande quel est le montant de la succession ?*

Comme il convient de prendre un nombre en même temps divisible par 2, 3 et 4, supposons que la succession s'élève à 3600 francs : dans cette supposition,

Le premier aurait eu . . 1800 — 1000 = 800f
Le second . . . . 1200 — 800 = 400
Le troisième . . . . 900 — 600 = 300 :

la somme de ces trois nombres n'étant que 1500f, l'erreur est 2100f. Supposons, en second lieu, la succession de 4800f, nombre encore divisible par 2, 3 et 4 : dans cette hypothèse

Le premier aurait eu . . 2400 — 1000 = 1400f
Le second . . . . 1600 — 800 = 800
Le troisième . . . . 1200 — 600 = 600 :

la somme de ces trois nombres n'étant que 2800, l'erreur est 2000f.

Ainsi, aux

indices . . 3600 4800
répondent . . 2100 2000

conséquemment

$$x = \frac{2100 \times 4800 - 2000 \times 3600}{2100 - 2000}$$

$$= \frac{10080000 - 7200000}{100}$$

$$= \frac{2880000}{100} = 28800$$

montant de la succession. Les parts des trois héritiers seront donc 13400^f, 8800^f et 6600^f dont la somme est, en effet, 28800^f.

7.[e] Question. *On demande un nombre tel que si on l'ôte de son cube, il reste* 1.

Cette question, traitée par l'algèbre, conduirait à une équation du troisième degré dont la résolution exigerait une extraction de racine carrée et deux extractions de racine cubique, tandis que la règle actuelle nous dispensera de l'une et de l'autre.

Un léger examen suffit pour faire découvrir que le nombre cherché doit tomber entre 1,3 et 1,4.

Première position : $x = 1{,}3$; le cube de x est 2,197 : il reste 0,897 au lieu de 1: l'erreur, en moins, est donc 0,103.

Seconde position : $x = 1{,}4$: le cube de x est 2,744; il reste 1,344 au lieu de 1 : l'erreur, en plus, est 0,344. On aura pour première valeur approchée de l'inconnue

$$\frac{-0{,}103 \times 1{,}4 - 0{,}344 \times 1{,}3}{-0{,}103 - 0{,}344} = \frac{-0{,}5914}{-0{,}447} = 1{,}323.$$

Procédons à une seconde approximation.

Première position : $x = 1{,}323$ dont le cube est 2,315685267; ôtant 1,323, il restera 0,992685267 : l'erreur est donc 0,007314733.

Seconde position : $x = 1{,}324$; le cube de x, est 2,320940224 : ôtant 1,324, il reste 0,996940224; l'erreur est donc 0,003059776. On a ainsi

$$\frac{1{,}324 \times 0{,}007314733 - 1{,}323 \times 0{,}003059776}{0{,}007314733 - 0{,}003059776} = \frac{0{,}005636623}{0{,}004254957}$$

$= 1{,}324719$, résultat exacte jusqu'à la sixième décimale : une troisième opération que nous laisserons à effectuer, ferait trouver les douze premières décimales exactes.

Des Annuités.

(130) Les questions *d'annuités* ont pour objet d'assigner le paiement constant qu'on doit faire annuellement, et pendant un nombre déterminé d'années, à l'effet d'éteindre un capital et la rente de ce capital.

1.re Question. *Un particulier qui doit une rente de* 2200 *francs, au capital de* 11000 *francs, voudrait éteindre en deux ans la rente et le capital, au moyen de deux paiemens égaux, effectués à la fin de chaque année; on demande ce que doit être le paiement annuel?*

Les deux paiemens devant être égaux, il suffit de découvrir l'un d'eux. La somme des deux paiemens effectués à une même époque, devant être égale au paiement unique que l'on devrait faire, si on voulait tout rembourser à cette même époque et en une seule fois, nous allons chercher à établir la relation qui doit exister entre le premier paiement et la somme des deux paiemens réunis et rapportés à l'époque en question, que nous supposerons être la fin de la seconde année. Puisque 11000 f. rapportent 2200 f. de rente, l'intérêt annuel est $\frac{2200}{11000} = \frac{20}{100}$, c'est-à-dire, 20 pour 100 : donc si le premier paiement, au lieu d'être fait à la fin de la première année, ne l'était qu'à la fin de la seconde, sa quotité devrait être augmentée d'un cinquième, à raison de l'intérêt qui est le cinquième du capital; il deviendrait donc les $\frac{6}{5}$ de ce qu'il était d'abord : le second paiement égal au premier, ou aux $\frac{5}{5}$ de ce premier, devant être fait à la fin de la seconde année, ne change pas : donc les deux paiemens réunis et rapportés à la fin de la seconde année, valent les $\frac{6}{5} + \frac{5}{5} = \frac{11}{5}$ du premier paiement cherché : il suit de là que les $\frac{11}{5}$ du premier paiement, sont égaux à la somme que l'on devrait compter à la fin

de la seconde année, si on voulait, à cette époque, se libérer en un seul paiement. Comme à raison de l'intérêt à 20 pour $\frac{0}{0}$, le capital 11000^f vaut 15840^f à la fin de la seconde année (*Règ. d'Intér.*), les $\frac{11}{5}$ du premier paiement sont donc égaux à 15840^f; donc le cinquième de ce paiement est $= \frac{15840^f}{11} = 1440^f$: conséquemment le premier paiement est $5 \times 1440 = 7200^f$. Ainsi on éteindra la rente et le capital au moyen de deux paiemens annuels égaux, de 7200^f chacun, effectués l'un à la fin de la première année, et l'autre à la fin de la seconde. En effet, le premier paiement étant de 7200^f, on n'acquitte donc réellement que 5000^f sur le capital 11000^f, eu égard aux 2200^f de rente; par là le capital primitif se trouve réduit à 6000^f. Ainsi, pendant la seconde année, on ne doit rembourser que le capital 6000^f qui augmenté des intérêts, donne 7200^f à la fin de cette année.

2.e Question. *On propose d'acquitter* 3310^f *en trois paiemens égaux effectués à la fin de chaque année, l'argent étant à* 10^f *pour* 100^f, *et en ayant toujours égard aux intérêts des intérêts : on demande quel doit être le paiement annuel ?*

En raisonnant comme dans le cas précédent, on dira : un capital de 3310^f au taux de 10 pour 100, ou du dixième du capital et à intérêt composé, devient après 3 années, $\frac{440561}{100} = 4405^f{,}61$ (*Règ. d'Int.*) : le premier paiement qui aurait dû se faire à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde, rapporté à la fin de la troisième année, devient $\frac{121}{100}$ de sa quotité primitive : le second paiement qui devait être effectué à la fin de la seconde année, rapporté à la fin de la troisième, devient $\frac{11}{10} = \frac{110}{100}$ de sa quotité primitive : le troisième paie-

ment qui doit être fait à la fin de la troisième année, n'étant pas déplacé, ne change pas, c'est-à-dire, qu'il reste $\frac{100}{100}$: la somme des trois paiemens ainsi ramenés à n'être effectués qu'à la fin de la troisième année, est donc $\frac{121}{100}+\frac{110}{100}+\frac{100}{100}=\frac{331}{100}$ du premier paiement : mais cette somme doit acquitter les $\frac{44056{,}1^f}{100}$ dus à la même époque : donc les $\frac{331}{100}$ du premier paiement font $\frac{44056{,}1}{100}$: d'où il résulte que 331 fois le premier paiement, fera $44056{,}1^f$, et que le premier paiement vaudra $\frac{44056{,}1^f}{331}=133{,}1^f$, paiement annuel. En effet, l'argent étant à 10 pour 100, ou, en d'autres termes, l'intérêt étant le dixième du capital, on doit à la fin de la première année, le capital 3310^f plus son intérêt 331^f, c'est-à-dire, 3641^f : on rembourse 1331^f, on redoit donc 2310^f au commencement de la seconde année : l'intérêt de cette somme, pendant la seconde année, étant 231^f, on doit à la fin de la seconde année 2541^f ; mais on rembourse 1331^f, on ne doit donc plus que 1210^f au commencement de la troisième année, lesquels joints à l'intérêt 121^f pendant cette année, font 1331 francs, dernier paiement qui est, en effet, le paiement annuel.

3.e Question. *Ayant placé un capital à 6 pour $\frac{0}{0}$ d'intérêt par an, et à intérêts composés, on veut chercher les nombres d'années au bout desquelles le capital sera devenu double, triple, quadruple de ce qu'il était primitivement ?*

Exprimons le capital par 1, et cherchons les états successifs de ce capital à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde, à la fin de la seconde ou au commencement de la troisième, etc. D'après

le taux de l'intérêt, le capital sera devenu à la fin de la première année, $\frac{106}{100} = 1{,}06$; ce capital, à la fin de la seconde année, sera $1{,}06 \times 1{,}06 = (1{,}06)^2$: d'où on conclut facilement qu'après un nombre quelconque d'années, il sera 1,06 élevé à une puissance marquée par le nombre d'années. Si donc on désigne par c ce qu'est devenu le capital 1 franc, après un nombre n d'années, on aura (*pag.* 170).

$$c = (1{,}06)^n$$

l'exposant n étant le nombre inconnu : or, on a vu (*pag.* 213), que le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre, est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'indice de la puissance; ainsi

$$\log. c = n \times \log. (1{,}06):$$

Il s'agit donc de déduire de cette égalité, les valeurs de n qui répondent aux capitaux $c = 2$, $c = 3$, $c = 4$, etc. Or; pour $c = 2$, l'égalité précédente devient

$$\log. 2 = n \times \log. (1{,}06)$$

mais $\log. 2 = 0{,}30103$, $\log. 1{,}06 = 0{,}02531$, donc

$$0{,}30103 = 0{,}02531 \times n$$

et conséquemment,

$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}02531} = \frac{30103}{2531} = 11{,}895 \text{ ans.}$$

Pour $c = 3$ dont le logarithme est 0,47712, on aurait

$$n = \frac{0{,}47712}{0{,}02531} = \frac{47712}{2531} = 18{,}854 \text{ ans.}$$

Pour $c = 4$ dont le logarithme est 0,60206, on aurait

$$n = \frac{0{,}60206}{0{,}02531} = \frac{60206}{2531} = 23{,}791 \text{ ans,}$$

et ainsi de suite.

4.ᵉ Question. *Quel capital faut-il donner actuellement, pour se faire une rente de 10000 francs pendant 20 ans à 5 ½ pour ⁰⁄₀, comprenant le remboursement du capital fourni par le rentier et de l'intérêt composé?*

On cherchera quel capital il faut donner actuellement, au taux de 5 ½ pour ⁰⁄₀, et à intérêts composés, pour recevoir 10000 francs au bout de 20 ans: on trouvera que ce capital est 3428 francs (*). Si l'on détermine de la même manière le capital qu'il faut fournir actuellement pour recevoir 10000 francs au bout de 19 ans, celui qu'il faut fournir actuellement pour recevoir 10000 francs au bout de 18 ans, et ainsi de suite, et si l'on additionne les vingt capitaux ainsi déterminés, on trouvera 119496 francs pour le capital cherché.

Nous donnerons un seul exemple de questions qui ont pour objet de déterminer entre plusieurs spéculations, quelle est la plus avantageuse : on conçoit que ce genre de recherches doit offrir de grandes difficultés, et qu'il exige dans plusieurs cas des considérations et des méthodes qui ne sont plus du domaine de l'arithmétique.

5.ᵉ Question. *Un propriétaire fait arracher des bois et les remplace par des vignes : on suppose, 1.° que chaque arpent de bois lui donne 400ᶠ de revenu annuel, et qu'il en coûte 350ᶠ par arpent pour remplacer des bois par des vignes ; 2.° qu'un arpent de vignes coûte 50ᶠ de façon par an, et qu'il ne produit rien les trois premières années, mais qu'il donne la 4.ᵉ année 325ᶠ, la 5.ᵉ année 500ᶠ, la 6.ᵉ année et*

(*) En désignant par x le capital inconnu, on sait (*Règle d'Int.*, 2.ᵉ *question*) que ce capital après 20 ans, est représenté par $x\left(\frac{105,5}{100}\right)^{20}$ $= x\,(1,055)^{20}$: on doit donc avoir

$$10000 = x\,(1,055)^{20},\ \text{d'où}\ x = \frac{10000}{(1,055)^{20}},$$

valeur de x qu'on obtiendra facilement par les tables de logarithmes.

toutes les suivantes 600^f ; 3.° que l'argent est à 10 pour 100 par an, et qu'on a égard aux intérêts des intérêts : on demande si l'opération est avantageuse?

Comme à partir de la sixième année le revenu des vignes surpasse celui des bois, on peut être tenté de croire qu'après un certain nombre d'années, cet excédent de revenu couvrira les frais, et qu'ainsi la nouvelle plantation présente des bénéfices. Mais il faut observer qu'on doit défalquer le revenu des bois, et les déboursés occasionnés par la vigne, et encore ce que ces différentes sommes rapporteraient d'intérêt, et que par conséquent les vignes ne donneront un bénéfice réel la sixième année et toutes les suivantes, que dans le seul cas où, à compter de cette époque, leur revenu surpasserait celui des bois, réuni aux intérêts des sommes perdues : la question se réduit donc à évaluer les pertes jusqu'au moment où le revenu de la vigne devient constant. Nous remarquerons que, pendant cinq ans, le propriétaire perdra les revenus des bois, et les déboursés relatifs à la vigne, pertes dont il faut cependant déduire les revenus des 4.e et 5.e années; mais comme on ne peut comparer des sommes payées en différens temps, qu'en rapportant les paiemens à une même époque, nous rapporterons à la fin de la cinquième année, toutes les pertes et les produits de la nouvelle plantation pendant cinq ans. La première année, le propriétaire débourse 350^f pour faire remplacer les bois par les vignes et 50^f de façon de la vigne : il perd en outre les 400^f que les bois lui auraient rapportés, ce qui fait une perte totale de 800^f; la deuxième année, il paiera 50^f de façon pour la vigne, et sera privé du revenu de 400^f de bois : il en résultera donc une perte de 450^f; la même perte aura lieu la 3.e, la 4.e et la 5.e année, de sorte que, pendant les cinq premières années, les pertes supportées, sont 800^f; 450^f; 450; 450^f et 450^f : ces pertes rapportées à la fin de la cinquième année, sont

1171ᶠ,28 : 598ᶠ,95 : 544ᶠ,5 : 495ᶠ et 450ᶠ : la somme des pertes rapportées à la fin de la 5.ᵉ année, est donc 3259ᶠ,73; mais la 4.ᵉ année, le produit de la vigne sera 325ᶠ qui, rapportés à la fin de la 5.ᵉ année, deviennent 357ᶠ,5 : ajoutant à cette somme les 560ᶠ que la vigne produira la cinquième année, on aura 857ᶠ,5 pour la totalité des produits de la vigne jusqu'à la fin de la 5.ᵉ année: cette dernière somme retranchée de 3259ᶠ,73 donnera 2402ᶠ, 23 pour la perte réelle du propriétaire à la fin de la 5.ᵉ année, ou au commencement de la 6.ᵉ: cette somme, placée à 10 pour 100, produirait 240ᶠ,223, qui ajoutés aux 400ᶠ que rapporteraient les bois, donneraient un revenu annuel de 640ᶠ,223 par arpent; mais la même étendue de terrain plantée en vignes, ne donnera que 600ᶠ de revenu, à compter de la même époque : donc, à partir de la 6.ᵉ année, le revenu du propriétaire sera diminué de 40ᶠ, 223 par arpent : d'où on conclut qu'il eut été plus avantageux pour lui de conserver les bois.

Nous aurions pu ajouter ici quelques questions de probabilités assez curieuses; mais outre que nous aurions dû les faire précéder de l'exposition des principes qui servent de fondement à cette doctrine, ce qui nous aurait fait sortir des bornes de cet ouvrage, nous aurions été forcés de ne traiter que des particularités de questions plus générales qu'on trouvera résolues dans la suite de ce cours, et particulièrement dans un chapitre de la seconde section de l'Algèbre, ayant pour titre : *Théorie élémentaire du calcul des probabilités.*





CHAPITRE XIII.

De l'Arithmétique des Grecs. Table des Chiffres romains.

(131) Nous avons extrait ce chapitre d'un mémoire de M. *Delambre*, *secrétaire perpétuel de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut*, qu'on trouve à la suite de la traduction des *Œuvres d'Archimède*, par *Peyrard*.

Les Grecs auxquels la géométrie est si redevable, n'avaient pas eu cette idée si heureuse et si féconde que nous tenons des *Arabes* et des *Indiens*, et qui fait qu'avec neuf caractères, nous sommes en état de représenter tous les nombres possibles.

Au lieu des caractères 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ils avaient, pour exprimer les unités, les lettres de leur alphabet (*)

α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, θ,

Au lieu de les employer pareillement pour les dixaines, ils se servaient des lettres

ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, *a* (**)

Pour les centaines ils prenaient

ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, *b*, (**)

C'est à cela que se bornaient tous leurs chiffres. Pour les mille ils employaient

͵α, ͵β, ͵γ, ͵δ, ͵ε, ͵ϛ, ͵ζ, ͵η, ͵θ,

(*) Pour l'intelligence de ce chapitre, nous avons placé ci-contre un alphabet grec.

(**) Nous avons substitué ces lettres *a* et *b* à deux caractères ou signes, les seuls que les *Grecs* n'aient pas empruntés de leur alphabet et qu'il aurait été inutile de faire graver, puisqu'on n'a d'ailleurs aucune occasion de les employer.

Alphabet de la langue grecque.

RANG des LETTRES.	GRANDES LETTRES.	PETITES LETTRES.	LEURS VALEURS.	LEUR PRONONCIATION.
1	Α	α	a	alpha
2	Β	β	b	bêta
3	Γ	γ	g	gamma
4	Δ	δ	d	delta
5	Ε	ε	e	epsilon
6	Ζ	ζ	z	zéta
7	Η	η	ê	êta
8	Θ	θ	th	thêta
9	Ι	ι	j	iota
10	Κ	κ	k	cappa
11	Λ	λ	l	lambda
12	Μ	μ	m	mu
13	Ν	ν	n	nu
14	Ξ	ξ	x	xi
15	Ο	ο	o	omicron
16	Π	π	p	pi
17	Ρ	ρ	r	rho
18	Σ	σ ς	s	sigma
19	Τ	τ	t	tau
20	Υ	υ	u	upsilon
21	Φ	φ	ph	phi
22	Χ	χ	ch	chi
23	Ψ	ψ	ps	psi
24	Ω	ω	ô	oméga

C'est-à-dire, qu'ils avaient recours aux caractères des unités simples, avec cette différence que, pour les distinguer, ils y joignaient l'*iota* souscrit, ou ils les marquaient d'un trait par-dessous.

Avant d'aller plus loin, remarquons le rapport constant qui existe entre les quatre caractères qui sont les premiers à gauche des lignes ci-dessus, c'est-à-dire,

$$\alpha,\ \iota,\ \rho,\ \underset{\iota}{\alpha} \quad \text{ou} \quad 1,\ 10,\ 100,\ 1000:$$

ils forment une progression décuple. Il en est de même de ceux-ci:

$$\beta,\ \kappa,\ \sigma,\ \underset{\iota}{\beta}, \quad \text{ou} \quad 2,\ 20,\ 200,\ 2000,$$

$$\gamma,\ \lambda,\ \tau,\ \underset{\iota}{\gamma}, \quad \text{ou} \quad 3,\ 30,\ 300,\ 3000,$$

et des suivans pris dans les mêmes lignes.

Les Grecs avaient même des mots pour exprimer la relation de ces nombres.

Avec ces caractères, ils pouvaient représenter un nombre quelconque au-dessous de 10000, ou d'une *myriade*. Ainsi $\underset{\iota}{\theta}$ϡϙθ signifiait 9999; $\underset{\iota}{\zeta}\tau\pi\beta$ valait 7382; $\underset{\iota}{\eta}\lambda$ϛ marquait 8036, $\underset{\iota}{\text{ϛ}}\upsilon\kappa$ valait 6420; $\underset{\iota}{\delta}\alpha$ répondait à 4001, et ainsi des autres.

Pour exprimer une myriade, ou 10000, les Grecs se servaient de la lettre M surmontée du nombre.

Ainsi	$\overset{\alpha}{M}$,	$\overset{\beta}{M}$,	$\overset{\gamma}{M}$,	$\overset{\delta}{M}$	
valaient	10000,	20000,	30000,	40000,	etc.;

$\overset{\delta\tau o\beta}{\underset{\iota}{}M}$ était la notation de 4372 myriades, et ainsi du reste.

En général, la lettre M au-dessous d'un nombre, équivalait à quatre zéros à la droite de ce nombre dans la notation arabe.

Cette notation est celle d'*Eutochius* dans ses Commentaires sur *Archimède*: elle était peu commode pour le calcul.

Pour désigner les myriades, *Diophante* et *Pappus* se servent des deux initiales Mυ, placées après le nombre. Ainsi αMυ, βMυ, γMυ représentaient 10000, 20000, 30000, etc. ͵δτοβMυ.͵ηϙζ désignait 4372 myriades 8097 unités ou 4372 8097 unités. C'est à peu près de cette manière que nous notons les nombres complexes.

Les mêmes auteurs employaient encore une notation bien plus simple; ils remplaçaient par un point les initiales Mυ : d'après cette convention, ͵δτοβ.͵ηϙζ signifie 4372 8097.

Les Grecs pouvaient ainsi noter jusqu'à 9999 9999, qu'ils écrivaient ͵ϑϡϙϑ.͵ϑϡϙϑ. Une unité de plus aurait fait la myriade de myriade, qui, dans notre système, vaut 100 000 000, ou cent millions. C'était là que se bornait l'Arithmétique des Grecs, et elle leur suffisait, parce que leurs unités de compte, telles que le talent et le stade, étaient plus fortes que nos unités ordinaires, la livre ou la toise. Il n'y avait donc guère que les géomètres et les astronomes pour lesquels ces limites fussent quelquefois trop resserrées. Par exemple, *Archimède*, dans son *Arénaire*, ayant à exprimer le nombre de grains de sable que contiendrait une sphère qui aurait pour diamètre la distance de la terre aux étoiles, et ce nombre étant, d'après lui, plus petit que 100 suivi de 61 zéros, c'est-à-dire, plus petit que mille myriades des nombres huitièmes (*), *Archimède*, dis-je, se vit obligé de prolonger indéfiniment l'Arithmétique des Grecs. Voyez sur ce point et sur d'autres améliorations, le Mémoire que nous analysons avec le regret de ne pouvoir le consigner ici en son entier.

(*) *Delambre* ayant supposé, d'après *Archimède*, que le diamètre d'une graine de pavot était la quarantième partie de la largeur d'un doigt, qu'elle contenait 10000 grains de sable, qu'un *stade* valait 10000 doigts, et

Pour exprimer le nombre . . . 3479 5012 6008 7000, les Grecs auraient écrit . . . . γυοθ . ειβ . ϛη . ζ;

dans cette phrase numérique, ils n'employaient donc que dix places au lieu de seize, parce qu'ils ne faisaient pas usage du zéro; et les tranches, au lieu d'être constamment de quatre chiffres, n'en avaient quelquefois que trois, deux, ou même un seul.

Quand la tranche des unités manquait entièrement, ils la remplaçaient par Mυ, signe qui rappelait que le nombre précédent avait des myriades pour unités. Ainsi pour exprimer . . . . 37 0000 0000 0000 0000, les Grecs écrivaient. . . . . . . λζ Mυ Mυ Mυ Mυ, ou 37 myriades quadruples.

Le caractère M° employé par *Diophante* et *Eutochius*, indique des *monades* ou des unités: ainsi M°κα signifie *unités* 21.

Il nous reste à dire comment les Grecs notaient les fractions.

Un trait placé à la droite d'un nombre et vers le haut, faisait de ce nombre le dénominateur d'une fraction dont l'unité était le numérateur. Par exemple, γ' notait $\frac{1}{3}$; δ', $\frac{1}{4}$; ξδ', $\frac{1}{64}$; ρκα', $\frac{1}{121}$. La fraction $\frac{1}{2}$ avait un caractère particulier, savoir: (ou < ou (' ou *K*.

Quand le numérateur était autre que l'unité, le dénominateur se plaçait au-dessus et à droite. Ainsi $\iota\epsilon^{\xi\delta}$ signifiait $\frac{15}{64}$ et $\sigma\xi\gamma.\gamma\phi\mu\delta^{\lambda\gamma.\alpha\psi o\varsigma}$ notait $\frac{2633544}{331776}$.

---

que le diamètre de la sphère des étoiles fixes, était de 10000000000 stades, a trouvé que le nombre des grains de sable contenus dans cette sphère, serait exprimé par 64 suivi de 61 zéros, résultat moindre, en effet, que 100 suivi de 61 zéros. Nous observerons que le *stade* des Grecs valait environ *cent vingt pas géométriques* de 5 pieds chacun, ce qui donne, à-peu-près, 200 mètres pour le stade sur la longueur duquel on varie beaucoup.

Pour l'intelligence de ce qui suit, nous rappellerons les myriades par le signe y, les mille par m, les centaines par c, les dixaines par d, et les unités ou les monades par o; en sorte que ce nombre ͵γ.αψοε ou 31775 pourra s'écrire 3^y 1^m 7^c 7^d 5°.

Au moyen de cette traduction, il sera plus facile de suivre toutes les opérations de l'Arithmétique en question, que nous allons détailler.

Exemple de l'Addition.

	ωμζ. ͵γϡκα	8^c 4^d 7°. 3^m 9^c 2^d 1°	847 3921
	ξ. ͵ηυ	6^d 8^m 4^c	60 8400
Somme	ϡη. ͵βτκα	9^c 8°. 2^m 3^c 2^d 1°	908 2321

La ligne inférieure ne contenant ni dixaines, ni unités, l'addition se borne à prendre 2^d 1° de la ligne supérieure, et à les écrire dans la somme et à droite.

Les centaines offrent 9^c plus 4^c qui font 13^c ou 1^m plus 3^c; on posera donc 3^c ou τ, et on retiendra le mille qu'on ajoutera avec 3^m plus 8^m qui font 12^m ou 1^y plus 2^m; on posera 2^m ou ͵β, et on retiendra une myriade qui sera unité simple dans la seconde tranche.

Nous trouvons d'abord dans cette tranche 7° et rien au-dessous; mais nous avons retenu une myriade ou une unité; nous aurons donc 8° ou η. Viennent ensuite 4^d plus 6^d ou 10^d, qui font 1^c plus o; nous laisserons vide la place des dixaines de myriades, et retenant 1^c, nous aurons 8^c plus 1^c ou 9^c ou ϡ.

On se rappellera que le point sépare les myriades ou nombres du second ordre, des nombres simples ou du premier ordre.

Exemple de Soustraction.

θ. γχλς ͅ	9^{y} 3^{m} 6^{c} 3^{d} 6°
β. γυ θ ͅ	2 3 4 .. 9
Différence ζ. σκζ	7^{y} 2^{c} 2^{d} 7°

La soustraction se fait de droite à gauche, et on emprunte quand le chiffre à soustraire est plus grand que celui dont on le soustrait. Cette opération n'ayant pas de difficultés, nous nous dispenserons de la détailler.

Multiplication.

Les Grecs commençaient leurs multiplications par les chiffres de la gauche du multiplicateur, comme nous le faisons quelquefois.

Ils prenaient aussi les chiffres du multiplicande en allant de gauche à droite; il y a cependant des exemples qui montrent qu'ils commençaient quelquefois par la droite du multiplicande.

ρνγ	1^{c} 5^{d} 3°
ρνγ	1 5 3
τ.ετ ͅ	1^{y} 5^{m} 3^{c}
εβϕ ρν ͅ ͅ	5^{m} 2^{m} 5^{c} 1^{c} 5^{d}
τρνθ	3^{c} 1^{c} 5^{d} 9°
Produit. β. γνθ ͅ	2^{y} 3^{m} 4^{c} 9°

ρ par ρ ou 100 par 100 font 10000 ou 1^{y} ou α

ρ par ν ou 100 par 50 font 5000 ou ε.
ͅ

ρ par γ ou 100 par 3 font 300 ou τ

ν par ρ ou 50 par 100 font 5000 ou 5^m ou ͵ε

ν par ν ou 50 par 50 font 2500 ou 2^m 5^c ou ͵βφ

qu'on pose à la suite de ͵ε, quoique ͵β et ͵ε soient des unités de même ordre, ou de mille.

ν par γ, ou 50 par 3 font 150 ou 1^c plus 5^d ou ρν; on place donc ρν à la suite.

ρ par γ, ou 100 par 3 font 300 ou 3^c ou τ, dans la troisième ligne.

ν par γ, ou 50 par 3 font 150 ou 1^c 5^d, ou ρν, qu'on place à la suite de τ.

Enfin γ par γ, ou 3 par 3 font 9 ou θ, qu'on place à la suite.

La multiplication est terminée, et il ne reste plus à faire que l'addition : il paraît qu'elle a été commencée par la droite.

θ ou 9 étant le seul chiffre des unités, on le portera aux unités dans la somme.

En dixaines, on a ν plus ν c'est-à-dire, 100; il n'y a donc rien en dixaines dans la somme.

On retient une centaine, laquelle ajoutée à 2 fois ρ ou 200, fait 300, puis 2 fois τ ou 600; le tout fait 900; mais il reste encore φ ou 500. Total des centaines, 1400; on posera donc υ ou 400, et l'on retiendra ͵α ou 1000.

A ce mille retenu ajoutons ͵β ou 2000 et 2 fois ͵ε ou 10000, et nous aurons en totalité 13000 ou ͵α.͵γ; mais nous avons encore 1ᴹ; le total des myriades est donc 2ᴹ ou β.

Cet exemple prouve que les Grecs faisaient séparément tous les produits, qu'ils les posaient sans rien retenir, et qu'ils mettaient dans une seule ligne isolée les produits partiels. M. *Delambre* ajoute : la manière des Grecs était plus facile que la nôtre, moins sujette à erreur, mais plus longue.

Exemple de Multiplication, dans lequel les deux facteurs sont des nombres fractionnaires.

$\underset{\iota}{\alpha}\omega\lambda\eta\ \theta^{\iota\alpha}$	$1^m\ 8^c\ 3^d\ 8^o\ \frac{8}{11}$
$\underset{\iota}{\alpha}\omega\lambda\eta\ \theta^{\iota\alpha}$	$1^m\ 8^c\ 3^d\ 8^o\ \frac{9}{11}$
$\overset{\rho}{M}\overset{\pi}{M}\overset{\gamma}{\underset{\iota}{M}}\eta\omega\iota\eta\beta^{\iota\alpha}$	$100ʏ\ 80ʏ\ 3ʏ\ 8^m\ 8^c\ 1^d\ 8^o\ \frac{2}{11}$
$\overset{\pi\xi}{M}\overset{\delta}{M}\overset{\beta}{M}\underset{\iota\iota}{\delta\varsigma}\upsilon\chi\nu\delta\varsigma^{\iota\alpha}$	$80ʏ\ 64ʏ\ 2ʏ\ 4^m\ 6^m\ 4^c\ 6^c\ 5^d\ 4^o\ \frac{5}{11}$
$\overset{\gamma}{M}\overset{\beta\delta}{M}\iota\, b\sigma\mu\kappa\delta\varsigma^{\iota\alpha}$	$3ʏ\ 2ʏ\ 4^m\ 9^c\ 2^c\ 4^d\ 2^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$
$\underset{\iota\iota}{\eta\varsigma}\upsilon\sigma\mu\xi\delta\varsigma\varsigma^{\iota\alpha}$	$8^m\ 6^m\ 4^c\ 2^c\ 4^d\ 6^d\ 4^o\ 6^o\ \frac{5}{11}$
$\omega\iota\eta\beta^{\iota o}\ \chi\nu\delta\varsigma^{\iota\alpha}$	$8^c\ 1^d\ 8^o\ \frac{2}{11}\ 6^c\ 5^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$
$\kappa\delta\varsigma^{\iota\alpha}\ \varsigma\varsigma^{\iota\alpha}\ \pi\alpha^{\rho\kappa\alpha}$	$2^d\ 4^o\ \frac{6}{11}\ 6^o\ \frac{6}{11}\ 81^{121}$
$\overset{\tau\lambda\eta}{\underset{\iota}{M}}\alpha\sigma\nu\alpha\zeta^{\iota\alpha}\ \pi\alpha^{\rho\kappa\alpha}$	$338ʏ\ 1^m\ 2^c\ 5^d\ 1^o\ \frac{7}{11}\ \frac{81}{121}$
ou $\overset{\tau\lambda\eta}{\underset{\iota}{M}}\alpha\sigma\nu\beta\ \lambda\zeta^{\rho\kappa\alpha}$	ou $338ʏ\ 1^m\ 2^c\ 5^d\ 2^o\ \frac{87}{121}$ ou $3381252\ \frac{87}{121}$

Formons le premier produit partiel, ou celui du multiplicande par 1^m.

1^m par 1^m ou 1000 par 1000 font 100 myriades ou 100ʏ.

1^m par 8^c ou 1000 par 800 font 800000 ou 80 myriades ou 80ʏ.

1^m par 3^d ou 1000 par 30 font 30000 ou 3 myriades ou 3ʏ.

1^m par 8° ou 1000 par 8 font 8000 ou 8^m.

1^m par $\frac{9}{11}$ ou $\frac{9000}{11}$ ou $8^c\ 1^d\ 8^o\ \frac{2}{11}$.

Passons à la seconde ligne ou au produit partiel du multiplicande par 8^c.

8^c par 1^m ou 800 par 1000 font 80 myriades ou 80^y.
8^c par 8^c ou 800 par 800 font 64 myriades ou 64^y.
8^c par 3^d ou 800 par 30 font 24000 ou 2 myriades plus 4 mille ou $2^y\ 4^m$.
8^c par 8° ou 800 par 8 font 6400 ou $6^m\ 4^c$.
8^c par $\frac{9}{11}$ ou $\frac{7200}{11}$ font $6^c\ 5^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$.

Troisième ligne ou troisième produit partiel, c'est-à-dire, celui du multiplicande par 3^d.
3^d par 1^m ou 30 par 1000 font 3 myriades ou 3^y.
3^d par 8^c ou 30 par 800 font 24000 ou 2 myriades plus 4 mille ou $2^y\ 4^m$.
3^d par 3^d ou 30 par 30 font 900 ou 9^c.
3^d par 8° ou 240 ou $2^c\ 4^d$.
3^d par $\frac{9}{11}$ ou $\frac{270}{11}$ ou $2^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$.

Quatrième ligne, ou produit partiel du multiplicande par 8°.
8° par 1^m ou 8000 ou 8^m.
8° par 8^c ou 6400 ou 6^m plus 4^c.
8° par 3^d ou 240 ou 2^c plus 4^d.
8° par 8° ou 64 ou 6^d plus 4°.
8° par $\frac{9}{11}$ ou $\frac{72}{11}$ font $6^o\ \frac{6}{11}$.

Il reste enfin à prendre les $\frac{9}{11}$ du multiplicande.
$\frac{9}{11}$ de 1^m ou $\frac{9000}{11}$ font $8^c\ 1^d\ 8^o\ \frac{2}{11}$.
$\frac{9}{11}$ de 8^c ou $\frac{7200}{11}$ font $6^c\ 5^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$.
$\frac{9}{11}$ de 3^d ou $\frac{270}{11}$ font $2^d\ 4^o\ \frac{6}{11}$.
$\frac{9}{11}$ de 8° ou $\frac{72}{11}$ font $6^o\ \frac{6}{11}$.
$\frac{9}{11}$ de $\frac{9}{11}$ ou $\frac{81}{121}$ font $\frac{8^d\ 1^o}{1^c\ 2^d\ 1^o}$ ou 81^{121}.

Passons à l'addition. En rassemblant les myriades, on aura 334^y; la collection des mille donne 36^m ou $3^y\ 6^m$; les centaines donnent en totalité 49^c ou $4^m\ 9^c$; toutes les dixaines valent 30^d ou 3^c; toutes les unités font 48 ou $4^d\ 8^o$; tous les onzièmes valent $\frac{40}{11}$ ou $3^o\ \frac{7}{11}$. Réunissant ces sommes et ajoutant la fraction $\frac{81}{121}$, nous aurons le produit total,

Les Grecs préféraient les fractions qui avaient l'unité pour numérateur : ainsi, par exemple, au lieu de $21\frac{15}{64}$; ils prenaient le nombre à-peu-près équivalent $21 + \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$.

En effet $\frac{15}{64} = \frac{45}{192} = \frac{32 + 13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{13}{192}$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{14 + \frac{10}{13}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$, à très-peu-près.

A cette occasion, nous observerons que leur notation fractionnaire était vicieuse dans le cas d'un numérateur autre que l'unité, et qu'elle pouvait même induire en erreur lorsque la fraction était jointe à un nombre entier, comme on a pu le voir dans l'exemple précédent (*).

Exemple de Division.

Prenons τλβ.γτκθ à diviser par ͵αωκγ, c'est-à-dire,

332^{y}	3^{m}	3^{c}	2^{d}	9°	}	1^{m}	8^{c}	2^{d}	3°
182	3					1^{m}	8^{c}	2^{d}	3°
150	0	3	2	9					
145	8	4							
4	1	9	2	9					
3	6	4	6						
	5	4	6	9					
	5	4	6	9.					

En 332^{y} combien de fois $1^{m}\,8^{c}$, diviseur en place duquel on supposera 2^{m} ; on sait que 1^{m} par 1^{m} est 100^{y} ; donc 2^{m} par 2^{m} font 400^{y} ; le quotient 2^{m} est donc trop fort, et il faut prendre 1^{m}.

Multiplions le diviseur par ce premier quotient, et nous aurons pour produit $182^{y}\ 3^{m}$ à retrancher du dividende, et le reste sera $150^{y}\ 0^{m}\ 3^{c}\ 2^{d}\ 9^{o}$.

En 150 myriades, 2^{m} seraient 750 fois, 1^{m} y serait 1500

(*) En effet, dans $\overset{\tau\lambda\eta}{\text{M}}$ ͵ασνβ $\lambda\zeta^{\rho\kappa\alpha}$ ce n'est que le blanc ou l'espace interposé, qui avertit que λζ est le numérateur de la fraction.

fois: on peut donc essayer 800, ou 8^c. Le produit du diviseur par ce quotient, sera $145^y\ 8^m\ 4^c$, et le reste $4^y\ 1^m\ 9^c\ 2^d\ 9^o$.

En 4^y ou 4 myriades, 2^m seraient 2 dixaines de fois: je mets 2^d au quotient; le produit est $3^y\ 6^m\ 4^c\ 6^d$, et le reste $5^m\ 4^c\ 6^d\ 9^o$.

En 5^m on aurait $2\frac{1}{2}$ fois 2^m : j'essaie 3 : le produit est $5^m\ 4^c\ 6^d\ 9^o$, égal au reste.

La division des Grecs était donc semblable à notre division complexe; elle était seulement plus longue, si, comme tout l'indique, ils commençaient leurs soustractions par la gauche.

M. *Delambre* ajoute un exemple d'extraction de racine carrée que nous omettrons.

En résumé, dit ce géomètre, il paraît que les Grecs faisaient le plus souvent leurs additions de gauche à droite, ce qui les rendait nécessairement plus longues: mais il y a lieu de soupçonner qu'ils savaient les faire comme nous, ainsi que la soustraction, quoique, pour cette opération, la chose ne soit pas bien prouvée.

Dans la multiplication et dans la division, ils allaient de gauche à droite.

Je terminerai par une réflexion qui se présente assez naturellement: lorsque les Grecs avaient obtenu un résultat numérique important, ils pouvaient arranger les lettres qui le composaient en un ou plusieurs mots plus faciles à retenir qu'un nombre. Ainsi, par exemple, le mot αβρασαξ dans lequel σ vaut 200, ρ vaut 100, ξ vaut 60, β vaut 2, enfin 3 fois α font 3, rappelait 365, ou le nombre des jours de l'année. On conçoit que cette facilité pouvait encore donner naissance à certains jeux d'esprit chez un peuple qui, comme on le sait, était si fécond en ce genre.

(132) Comme les chiffres romains se rencontrent souvent dans les dates, dans les calendriers, sur les frontispices des édifices publics, et qu'ils sont encore employés à d'autres usages, nous donnerons une table de la valeur de ces chiffres.

I vaut	un	LX vaut	soixante
II	deux	LXX	soixante-dix
III	trois	LXXX	quatre-vingt
IV	quatre	XC	quatre-vingt-dix
V	cinq	C	cent
VI	six	CC	deux cents
VII	sept	CCC	trois cents
VIII	huit	CCCC	quatre cents
IX	neuf	D	cinq cents
X	dix	DC	six cents
XX	vingt	DCC	sept cents
XXX	trente	DCCC	huit cents
XL	quarante	DCCCC	neuf cents.
L	cinquante	M	mille.

Remarque. De même que quatre et six, quarante et soixante s'expriment au moyen des deux mêmes caractères transposés, savoir, IV et VI, XL et LX, on devrait noter, par analogie, quatre cents et six cents, etc., comme il suit : CD, DC, etc. Si on a, par exemple, à écrire en chiffres romains, le nombre 159, on le décomposera en cent, en cinquante et en neuf, et prenant les caractères correspondans C, puis L et enfin IX, on les écrira de suite et on aura CLIX pour représentation du nombre proposé.

Les Romains emploient encore ces notations :

i vaut	un	lx vaut	soixante
ij	deux	lxx	soixante-dix
iij	trois	lxxx	quatre-vingt
iv	quatre	xc	quatre-vingt-dix
v	cinq	c	cent
vj	six	cc	deux cents
vij	sept	ccc	trois cents
viij	huit	cccc	quatre cents
ix	neuf	d	cinq cents
x	dix	dc	six cents
xx	vingt	dcc	sept cents
xxx	trente	dccc	huit cents
xl	quarante	dcccc	neuf cents
l	cinquante	m	mille.

CHAPITRE XIV.

Opérations sur les nombres Complexes. (*)

(133) Le nouveau système métrique remplaçant un système dans lequel on a exprimé beaucoup de résultats importans, il est nécessaire, pour les comparaisons et les conversions qu'on est obligé de faire, de présenter d'abord le tableau des anciennes mesures et de leurs sous-divisions; et comme aussi on peut avoir à vérifier des opérations faites antérieurement à l'introduction des mesures nouvelles, il convient de donner la théorie de ces opérations.

Les nombres que nous allons considérer sont dits *complexes*, par opposition à ceux qui ne sont composés que d'unités entières, ou d'une seule espèce de sous-divisions, et que l'on nomme *nombres incomplexes*, les seuls que nous ayons considérés jusqu'ici.

On peut compter sept espèces de mesures : 1.° *les mesures linéaires ou de longueur;* 2.° *les mesures superficielles;* 3.° *les mesures de volume ou de capacité;* 4.° *les mesures ponderales ou les poids;* 5.° *l'unité monétaire;* 6.° *les mesures circulaires ou les degrés;* 7.° *les mesures temporaires ou de durée.*

Pour les monnaies.

Une livre ou 1^l vaut 20 sous ou 20^s.
1 sou vaut 12 deniers ou 12^d.

Pour les temps.

Une année vaut 12 mois ou 12^m.
1 mois vaut 28, 29, 30 ou 31 jours : 28^j, 29^j, 30^j, 31^j.
1 jour vaut 24 heures ou 24^h.
1 heure vaut 60 minutes ou $60'$.
1 minute vaut 60 secondes ou $60''$.

(*) Quoique toutes les opérations complexes qu'on trouve ici, se rapportent à *l'ancien système métrique français*, cependant les procédés d'après lesquels on opère, conviennent à tout autre système de poids et mesures, sauf les modifications convenables dans ce qui se rapporte aux retenues, aux emprunts et *aux parties aliquotes*. Dans ce pays, on peut consulter, quant *au système monétaire*, les tarifs usités; et quant aux *mesures agraires*, *les tables de Réduction*, etc., par *J. L. Piéton*, chef du bureau spécial de la direction du cadastre.

Pour les Poids.

Une livre ou 1^{lb} vaut 2 marcs ou 2^{m}.
Un marc vaut 8 onces ou 8°.
Une once vaut 8 gros ou 8^{g}.
Un gros ou drachme vaut 3 deniers ou 3^{d}.
Un denier ou scrupule vaut 24 grains ou 24^{gr}.
Le tonneau de mer pèse 2000 livres.
Le quintal pèse 100 livres.

Pour les Longueurs.

Une toise ou 1^{t} vaut 6 pieds ou 6^{pi}.
Un pied vaut 12 pouces ou 12^{po}.
Un pouce vaut 12 lignes ou 12^{l}.
Une ligne vaut 12 points ou 12^{pt}.

Parmi les longueurs, les plus remarquables sont les suivantes :

L'aune de Paris ou 1^{au} vaut 3^{pi} 7^{po} 3^{l} $\frac{5}{6}$; l'aune se divise en fractions ordinaires.

La lieue de 25 au degré vaut $2280^{t},33$; le degré est la 90.e partie de l'arc de grand cercle compris entre le pôle et l'équateur.

La lieue marine de 20 au degré vaut $2850^{t},41$.

Les distances se mesurent quelquefois en pas ordinaires estimés 2^{pi} $\frac{1}{2}$, et en pas géométriques ou brasses de 5^{pi}.

Le rayon de l'équateur terrestre est de 3 271 208 toises.

Le demi-axe de la terre, ou la distance du centre au pôle est de 3 261 443 toises.

La distance du pôle à l'équateur, mesurée sur le méridien de Paris, est de 5 130 740 toises.

Le degré terrestre qui est la 90.me partie de cette distance, vaut donc 57 008 toises.

L'arc terrestre d'une minute, ou la 60.me partie d'un degré, est donc d'environ 950 toises.

Pour les Surfaces.

L'arpent (eaux et forêts) vaut 100 perches carrées (à 22^{pi} la perche), ou 1344,444, etc. toises carrées (*Géom.*).

L'arpent de Paris vaut 100 perches carrées (à 18^{pi} la perche) ou 900 toises carrées (*idem*).

Pour les solidités et les bois.

La corde de bois (eaux et forêts) porte 4^{pi} de haut, 8^{pi} de large et $3^{pi}\frac{1}{2}$ de long ; elle vaut 112 pieds cubes (*Géom.*).

La solive charpente vaut 3 pieds cubes (*idem*).

Pour les capacités.

Le muid de vin de Paris contient 288 pintes.

Le septier de blé de Paris contient 12 boisseaux.

Le boisseau contient 16 litrons.

Pour les mesures circulaires. (Voyez la Géométrie).

Nous commencerons par résoudre les deux questions suivantes : 1.° *Un nombre complexe étant donné, le traduire soit en fraction ordinaire, soit en fraction décimale.* 2.° *Repasser d'une fraction soit ordinaire soit décimale au nombre complexe correspondant.*

1.° Soit le nombre $8^{l}\ 7^{s}\ 6^{d}$. La livre valant 20^{s} et 1^{s} valant 12^{d}, une livre vaudra 20×12^{d} ou 240^{d}; donc $1^{d} = \frac{1}{240}$ d'une livre, et $1^{s} = \frac{1}{20}$ d'une livre ; conséquemment $8^{l}\ 7^{s}\ 6^{d} = 8^{l} + \frac{7}{20} + \frac{6}{240} = 8 + \frac{90}{240} = 8^{l} + \frac{3}{8} = 8^{l},375$ (*Ch.*VII), à moins d'un millième de la livre.

Soit, en second lieu, le nombre $4^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$; le pied valant 12^{po}, les $4^{pi}\ 6^{po}$ valent 54^{po} ; le pouce valant 12^{li}, les 54 pouces valent $54 \times 12^{li} = 648^{li}$ qui ajoutées à 8^{li} font 656^{li} ; mais comme $1^{t} = 6^{pi} = 72^{po} = 864^{li}$, il s'ensuit que $1^{li} = \frac{1}{864}$ de la toise, et que $656^{li} = \frac{656}{864} = \frac{41}{54} = 0,759$ de la toise, à moins d'un millième de la toise.

Proposons-nous, en troisième lieu, de réduire $1^{m}\ 5^{o}\ 7^{g}\ 1^{d}\ 16^{gr}$ en fractions ordinaire et décimale de la livre poids : on a $1^{m}\ 5^{o} = 13^{o} = 104^{g}$ qui avec 7^{g} font $111^{g} = 333^{d}$ qui avec 1^{d} font $334^{d} = 8016^{gr}$ qui avec 16^{gr} font 8032^{gr}; mais la livre $= 2^{m} = 16^{o} = 128^{g} = 384^{d} = 9216^{gr}$; donc $1^{m}\ 5^{o}\ 7^{g}\ 1^{d}\ 16^{gr} = \frac{8016}{9216} = \frac{167}{192} = 0^{l},869$ à moins d'un millième.

2.° Soit $\frac{5^{l}}{8}$ à convertir en sous et deniers : cette question revient à diviser 5^{l} par 8, ce qui donne le quotient 0^{l} avec le reste 5^{l} qu'on réduira en sous, en le multipliant par 20, ce qui donne 100 sous qui

divisés par 8 donnent le quotient 12^s avec le reste 4^s qu'on réduira en deniers, en multipliant 4^s par 12, d'où résultent 48^d qui divisés par 8 donnent 6^d. Donc $\frac{5^l}{8} = 0^l\ 12^s\ 6^d$.

On trouvera par le même procédé que $\frac{205^t}{324} = 3^p\ 9^{po}\ 6^{li}\ 8^{pt}$: que $\frac{251^{lb}}{288} = 1^m\ 5^o\ 7^g\ 1^d\ 16^{gr}$.

Qu'on ait, en second lieu, à convertir $0^l,625$ en sous et deniers : on dira, puisque $625^l = 625 \times 20^s = 12500^s$, le millième de 625 vaudra le millième de 12500^s, c'est-à-dire, $12^s,5 = 12^s + 0^s,5$: or 1^s valant 12^d, les 5^s valent $5 \times 12^d = 60^d$, et le dixième de 5^s vaut le dixième de 60^d ou 6^d : donc $0^l,625 = 12^s\ 6^d$.

On trouverait, d'après le même procédé, que $0^{lb},8715 = 1^m\ 5^o\ 7^g\ 1^d\ 16^{gr}$.

Le dispositif de chacune de ces opérations, est clairement indiqué par les détails que nous venons de donner.

Pratiquons les quatre règles sur les nombres complexes, en commençant par l'addition. Qu'on ait à trouver la somme des cinq nombres.

364^l	17^s	10^d
845	19	9
74	1	0
9456	10	11
9	7	8
10750	17	2

Dans ce système de numération, 12 des plus petites unités qui sont des deniers, en valent une des moyennes ou des sous, dix sous valent 1 dixaine de sous, deux dixaines de sous valent une livre, et, à partir de la livre, les unités deviennent décuples les unes des autres : ainsi autant de fois 12^d autant de sous, et on pose le surplus 2^d sous la colonne des deniers ; on retient 3 sous qu'on ajoute aux sous, et autant de fois 10^s, autant de dixaines ; on pose le surplus 7^s sous la colonne des sous, et on ajoute les trois dixaines retenues aux dixaines, et autant de fois deux dixaines, autant de livres : on écrit le surplus 1 dixaine, sous la colonne des dixaines, et on ajoute 2 livres retenues aux livres. A partir de cette époque on rentre dans l'addition ordinaire.

On s'exercera sur d'autres nombres complexes en se conformant au mode particulier de sous-divisions de l'unité principale.

Passons à la soustraction et supposons que de

	54^t	3^{pi}	9^{po}	0^{li}	1^{pt}
on ait à ôter	21	5	10	2	5
	32^t	3^{pi}	10^{po}	9^{li}	8^{pt}.

En procedant toujours de droite vers gauche, on empruntera 1^{po} qui vaut 12li ou $11^{li} + 1^{li}$ ou $11^{li} + 12^{pt}$; or, $12^{pt} + 1^{pt}$ font 13^{pt}, d'où retranchant 5^{pt}, il reste 8^{pt} : de 11^{li} retranchant 2^{li}, il reste 9^{li} : de 8^{po} il faut retrancher 10^{po}; à cet effet, on empruntera $1^{pi} = 12^{po}$ qui ajoutés à 8^{po} donnent 20^{po}, d'où retranchant 10^{po}, il reste 12^{po} : pour opérer la soustraction des pieds on empruntera 1^{t} qui vaut 6^{pi} qui ajoutés à 2^{pi} donnent 8^{pi}, d'où retranchant 5^{pi}, il reste 3^{pi} : enfin, de 53^{t} ôtant 21^{t}, il reste 32^{t}.

On remarquera que l'emprunt d'une seule unité rend toujours la soustraction possible.

Les preuves de ces deux opérations se font exactement de la même manière que dans le cas où les nombres sont incomplexes.

Passons à la multiplication.

1.er Exemple. *A* 28^{l} 18^{s} *la toise d'ouvrage, combien coûteront* 54^{t} *?*

Puisqu'une toise coûte 28^{l} 18^{s}, suivant l'énoncé, les 54^{t} coûteront 54 fois 28^{l} 18^{s} : ainsi le multiplicateur sera un nombre abstrait, et le produit comptera des livres et sous-divisions de la livre, comme l'exige l'éuoncé. Après avoir répété 54 fois 28^{t} ce qui donne 1512^{t}, il faudra prendre 54 fois 18^{s} : à cet effet, on dira : si pour 1^{l} répétée 54 fois, on a 54^{l}, pour 10^{s} on aura 27^{l}, ponr 5^{s} on aura la moitié de 27^{l}, c'est-à-dire, 13^{l} 10^{s}, pour 2^{s} on aura le cinquième de ce qu'on a eu pour 10^{s}, c'est-à-dire, 5^{l} 8^{s}, et conséquemment pour 1^{s} on aura 2^{l} 14^{s}. En sorte que pour $10^{s} + 5^{s} + 2^{s} + 1^{s}$, ou pour 18^{s} répétés 54 fois, on a 27^{l} plus 13^{l} 10^{s} plus 5^{l} 8^{s} plus 2^{l} 14^{s}, ce qui fait 48^{l} 12^{s} à ajouter à 1512^{l} : le produit cherché est donc 1560^{l} 12^{s}. Le principe de ce calcul consiste dans la décomposition des 18^{s}, d'abord en une fraction exacte de la livre, puis en sous-divisions exactes de celle-ci, ou les unes des autres ; ces fractions ou sous-divisions exactes sont encore dites *parties aliquotes*. On voit ici le dispositif de l'opération :

	28^{l}	18^{s}
	54	
	112	
	140	
pour 10^{s}	27	
5	13	10
2	5	8
1	2	14
	1560^{l}	12^{s}

Si outre les sous, on avait des deniers, 10^{d} par exemple, on décomposerait 10^{d} en parties aliquotes d'un sou, savoir, en $6^{d} + 2^{d} + 2^{d}$;

pour 6^d on prendrait $\frac{1}{2}$ du produit pour 1^s ; pour 2^d on prendrait $\frac{1}{3}$ du produit pour 6^d qu'on répéterait une seconde fois : on aurait ainsi trois nouveaux produits partiels à ajouter à $1560^l\ 12^s$.

A l'égard du produit pour 2^s qui se rencontre souvent, nous indiquerons une abréviation de calcul : qu'il s'agisse de répéter 246 fois 2^s, l'opération revient à prendre 246 fois $\frac{1}{10}$ de la livre, ce qui donne $24^l,6 = 24^l\ 12^s$, en observant que le dixième d'une livre vaut 2^s. Donc *pour multiplier* 2^s *par un nombre quelconque, il faut écrire au rang des livres tous les chiffres du nombre, à l'exception du dernier à droite dont on comptera le double en sous :* d'où il suit encore que pour multiplier 1^s par 257, par exemple, il faut prendre la moitié de 25 qui est 12, compter 12 en livres, et le reste 17 en sous.

2.e Exemple. *Pour* 1^l *on a fait faire* $35^t\ 5^{pi}\ 8^{po}$ *d'ouvrage, combien fera-t-on faire du même ouvrage pour* 154^l *?*

Il est clair que, pour 154^l on fera faire 154 fois $35^t\ 5^{pi}\ 8^{po}$ · ainsi le multiplicateur sera le nombre abstrait 154, et le produit de la nature du multiplicande, comptera des toises et sous-divisions de la toise. On voit ici l'opération :

	35^t	5^{pi}	8^{po}
	154		
	770		
	462		
pour 3^{pi}	77		
2^{pi}	51 . . .	2^{pi}	
8^{po}	17 . . .	0 . . .	8^{po}
	5535^t . . .	2^{pi} . . .	8^{po}

Après avoir décomposé 5^{pi} en $3^{pi} + 2^{pi}$, on observe que 3^{pi} étant la moitié de la toise, on doit avoir pour 3^{pi} la moitié de ce qu'on aurait pour 1^t, c'est-à-dire, la moitié de 154^t, ou 77^t ; que 2^{pi} étant le tiers de la toise, on doit prendre le tiers de 154^t qui est $51^t\ 2^{pi}$; qu'enfin 8^{po} étant le tiers de $2^{pi} = 24^{po}$, on doit prendre le tiers de $51^t\ 2^{pi}$, qui est $17^t\ 0^{pi}\ 8^{po}$. Dans cet exemple, 2^{pi} n'est pas une partie aliquote de 3^{pi}, mais de la toise ; ainsi il est indifférent que les sous-divisions soient des parties aliquotes les unes des autres ou de l'unité principale.

3.e Exemple. *A raison d'une certaine somme pour* $37^{lb}\ 1^m\ 0^o\ 4^g\ 0^d\ 8^{gr}$ *d'une marchandise, on demande combien on aura de livres, marcs, etc. pour* 96 *fois cette somme ?*

On aura 96 fois le nombre donné de livres poids et de ses sous-divisions. Telle est l'opération :

	37^{lb}	1^{m}	0^{o}	4^{g}	0^{d}	8^{gr}
	96					
	222					
	333					
pour 1^{m}	48					
faux produit pour 1°	6					
pour 4^{g}	3					
faux produit pour 1^{d}	0	0^{m}	4°			
pour 8^{gr}	0	0	1	2^{g}	2^{d}	
	3603^{lb}	0^{m}	1^{o}	2^{g}	2^{d}	

Après avoir répété 96 fois 37^{lb}, ce qui ne peut faire difficulté, on prend pour 1^{m} la moitié de 96^{lb}, ce qui fait 48^{lb} ; il faut prendre pour 4^{g} qui font la moitié d'une once, et comme 1° est elle-même le huitième d'un marc, on peut prendre d'abord pour 1° le huitième de 48^{lb} qui est 6^{lb}, et ensuite la moitié de 6^{lb}, qui est 3^{lb}, ayant soin de barrer 6^{lb} qu'on nomme *faux produit*, parce qu'il n'est ici qu'auxiliaire. On en fera autant pour 8^{g}, c'est-à-dire, qu'on prendra un faux produit pour 1^{d} qui est le 12.me de 4^{g}, produit qu'on obtient en prenant le 12.me des 3^{lb} qui répondent à 4^{g} : ce douzième est 0^{lb} 0^{m} 4^{o} qu'il faut barrer, comme ne devant pas entrer dans le produit total : or, 8^{gr} étant le tiers de 1^{d}, on prendra le tiers de 4°, qui est 1^{o} 2^{g} 2^{d}. Il reste à ajouter les produits partiels, à l'exception des deux produits barrés.

4.e Exemple. *A* 11^{l} 7^{s} 11^{d} $\frac{7}{8}$ *une toise d'ouvrage, combien coûteront* 384 *toises ?*

On doit répéter 384 fois 11^{l} 7^{s} $11^{d}\frac{7}{8}$, opération dont on voit le détail ci-dessous :

	11^{l}	7^{s}	3^{d} $\frac{7}{8}$
	384		
	4224		
pour 5^{s}	96		
2^{s}	38 ...	8	
f. pr. 6^{d}	9 ...	12	
3^{d}	4 ...	16	
f. pr. 2^{d}	3 ...	4	
$\frac{4}{8}$	0 ...	16	
$\frac{2}{3}$	0 ...	8	
$\frac{1}{8}$	0 ...	4	
	4364^{l}	12^{s}	

On observera que nous avons décomposé les $\frac{7}{8}$ de denier en $\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$, que pour $\frac{4}{8}^d = \frac{1}{2}^d$, nous avons pris le quart du produit pour 2^d, qu'ensuite pour $\frac{2}{8}$, nous avons pris la moitié du produit pour $\frac{4}{8}$, et qu'enfin pour $\frac{1}{8}$, nous avons eu la moitié du dernier produit. On aurait pu décomposer le multiplicateur 384 en ses facteurs 12, 4 et 8, et multiplier le multiplicande d'abord par 12, ensuite par 4 et enfin par 8 : nous saisirons cette occasion d'observer que lorsque le multiplicateur incomplexe ne surpasse pas 12, on peut commencer la multiplication par les plus petites sous-divisions du multiplicande : ainsi, dans cet exemple, et en multipliant d'abord par le facteur 8, on dira $8 \times \frac{7}{8} = 7^d$ qu'on retient pour les ajouter à $8 \times 3^d = 24^d$, ce qui donne $31^d = 2^s + 7^d$, et ainsi de suite : d'où résulte le premier produit partiel $90^l\ 18^s\ 7^d$; en second lieu, 12 fois ce produit donne $1091^l\ 3^s$, et enfin 4 fois ce dernier produit donne $4364^l\ 12^s$, ce qui est, en effet, le résultat obtenu plus haut par une autre voie.

Les élèves s'exerceront utilement en refaisant toutes les multiplications précédentes par les deux procédés suivans : ils réduiront les sous-divisions du multiplicande en fractions ordinaire et décimale de l'unité ; puis ayant obtenu le produit sous forme de fractions ordinaire et décimale, ils traduiront ces fractions en sous-divisions de l'unité principale.

Nous allons passer à des cas plus composés qui seront faciles à résoudre, d'après ce qui précède.

5.e Exemple. *Combien fera-t-on d'ouvrage pour $154^l\ 12^s\ 6^d$, à raison de 1^l pour $35^t\ 5^{pi}\ 8^{po}$?*

D'abord pour 154^l, on fera faire 154 fois $35^t\ 5^{pi}\ 8^{po}$: ce produit est $5535^t\ 2^{pi}\ 8^{po}$; ensuite on dira : puisque pour 1^l on fait faire $35^t\ 5^{pi}\ 8^{po}$, pour 10^s on en fera faire la moitié, qui est $17^t\ 5^{pi}\ 10^{po}$, et ensuite pour $2^s\ 6^d$ quart de 10^s, on fera faire le quart de $17^t\ 5^{pi}\ 10^{po}$, c'est-à-dire, $4^t\ 2^{pi}\ 11^{po}\ 6^{li}$. Sommant ces trois produits, on trouve pour réponse $5557^t\ 5^{pi}\ 5^{po}\ 6^{li}$.

6.e Exemple. *La toise d'un certain ouvrage vaut $154^l\ 12^s\ 6^d$, à combien reviendront $35^t\ 5^{pi}\ 8^{po}$ de cet ouvrage ?*

Quoique les données de cette question soient les mêmes que celles de la question précédente, cependant les résultats sont bien différens quant à la grandeur et à l'espèce. Dans l'exemple précédent, le produit est en toises et sous-divisions de la toise ; dans celui-ci, il doit être, d'après l'énoncé, en livres et sous-divisions de la livre. On opèrera comme il suit :

	154^l	12^s	6^d
	35^t	5^{pi}	8^{po}
	770		
	462		
Pour 10^s	17	10	
$2^s\ 6^d$	4	7	6
Pour 3^{pi}	77	6	3
2^{pi}	51	10	10
8^{po}	17	3	$7\frac{1}{3}$
	5557^l	18^s	$2^d\frac{1}{3}$

On a d'abord répété 35 fois le multiplicande ; puis, comme d'après l'énoncé 1 toise vaut $154^l\ 12^s\ 6^d$, on a estimé conformément à cette condition, les $5^{pi}\ 8^{po}$.

7.e Exemple. *A* $49^l\ 17^s\ 8^d$ *le marc d'argent*, *combien coûteront* $37^m\ 5^o\ 4^g\ 0^d\ 19^{gr}$?

Le produit devant compter des livres, on prendra pour multiplicande celui des deux nombres qui compte des livres. On aura donc

	49^l	17^s	8^d		
	37^m	5^o	4^g	0^d	19^{gr}
	343				
	147				
Pour 10^s	18	10			
5^s	9	5			
2	3	14			
8^d	1	4	8^d		
Pour 4°	24	18	10		
1°	6	4	$8\frac{1}{2}$		
4^g	3	2	$4\frac{1}{4}$		
12^{gr}		2	$7\frac{17}{96}$		
6^{gr}		1	$3\frac{113}{192}$		
1^{gr}		0	$2\frac{639}{1152}$		
	1880^l	3^s	$8^d\frac{131}{1152}$		

Après avoir multiplié suivant le procédé connu, $49^l\ 17^s\ 6^d$, par 37, on estime conformément au prix du marc, celui de $5^o\ 4^g\ 0^d\ 19^{gr}$, ce qui ne peut présenter de difficultés. On observera que comme la partie aliquote qu'il faut prendre d'un produit partiel pour avoir le suivant, est,

en même temps, celle qu'on doit prendre de la fraction jointe au premier produit, pour avoir celle qui répond au second, il est bon d'écrire le dénominateur de cette partie aliquote à la suite de la fraction supérieure, pour avoir sous les yeux le facteur par lequel on doit multiplier les deux termes de cette fraction pour la réduire à la dénomination de la suivante, ce qui favorise l'addition successive de ces fractions.

8.e Exemple. *A* $793^{l}\ 17^{s}\ 5^{d}\ \frac{4}{7}$ *le marc d'or, combien coûteront* $87^{m}\ 6^{o}\ 59^{g}\ 2^{d}\ 22^{gr}\ \frac{29}{72}$?

On peut opérer, comme on l'a fait dans le cas précédent, ou bien on peut réduire le multiplicande d'abord en septièmes de deniers, puis multipliant son dénominateur par 240, on aura le multiplicande en fraction de la livre; 2.° le multiplicateur en soixante-douzième de grains, puis multipliant son dénominateur par 4608 nombre de grains contenus dans le marc, on aura une fraction du marc qu'on regardera comme abstraite: multipliant la première par la seconde fraction, le produit sera une fraction de livres qu'on évaluera en livres et sous-divisions de la livre. Les deux résultats doivent être identiques.

Nous passerons à la division.

9.e Exemple. *On demande le prix de la toise, en supposant que 21 toises aient coûté* $560^{l}\ 5^{s}\ 2^{d}$?

Il s'agit donc de prendre le 21.e de $560^{l}\ 5^{s}\ 3^{d}$, c'est-à-dire, le 21e de 560^{l}, celui de 5^{s}, puis celui de 3^{d}: cela fait, on ajoutera les trois résultats. Le 21.e de 560^{l} est $26^{l}\,\frac{14}{21} = 26^{l}\,\frac{2}{3} = 26^{l}\ 13^{s}\ 4^{d}$; le 21.e de 5^{s} est $\frac{5^{s}}{21} = \frac{60^{d}}{21} = \frac{20^{d}}{7} = 2^{d}\,\frac{6}{7}$; enfin le 21.e de $3^{d} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$; la somme de ces trois produits est $26^{l}\ 13^{s}\ 7^{d}$. Mais il sera plus expéditif d'opérer comme il suit

560^{l} 5^{s} 3^{d}	21
140	26^{l} 13^{s} 7^{d}
14^{l}	
20	
285	
75	
12^{s}	
12	
147	
0	

Après avoir divisé à l'ordinaire 560^l par 21, division qui donne le quotient 26^l et le reste 14^l, on réduit ce reste en sous, en le multipliant par 20, et au produit, on ajoute les 5^s du dividende : la somme est 285^s, laquelle divisée par 21, donne pour quotient 13^s et pour reste 12^s qu'on réduit en deniers en multipliant par 12, et au produit on ajoute les 3^d du dividende, ce qui donne 147^d qui divisés par 21, donnent le quotient 7 sans reste.

Cette solution conviendrait encore au cas où il s'agirait de partager 560^l 5^s 3^d entre 21 personnes.

10.e Exemple. *Trouver combien de fois* 560^l 5^s 3^d *contiennent* 21^l?

Dans cette question où les données sont exactement les mêmes que dans la précédente, le quotient est différent par l'espèce, puisqu'il devient abstrait. Pour le trouver, il faut réduire les 5^s 3^d en fraction de la livre, ce qui donne $\frac{63}{240} = \frac{21}{80}$, et on a à exécuter la division

$$\begin{array}{r|l} 560\,\frac{21}{80} & 21 \\ \cline{2-2} 140 & 26\,\frac{1141}{1680} = 26\,\frac{163}{240} \\ 14 & \\ 80 & \\ \cline{1-1} 1120 & \\ 21 & \\ \cline{1-1} 1141 & \end{array}$$

Après avoir divisé 560 par 21, le quotient est 26 et le reste 14, qu'on réduit en 80.e en multipliant 14 par 80, et ajoutant au produit le numérateur 21 de la fraction : la somme est $\frac{1141}{80}$, dont le 21.e est $\frac{1141}{1680}$, et en divisant haut et bas par 7, la fraction réduite est $\frac{163}{240}$.

11.e Exemple. *A* 21^l *la toise, combien aura-t-on de toises pour* 560^l 5^s 3^d?

On observe qu'autant de fois 21^l sont dans 560^l 5^s 3^d, autant on aura de toises dont le nombre est conséquemment donné par le rapport $\frac{560^l\ 5^s\ 3^d}{21^l} = \frac{560\,\frac{21}{80}}{21}$, après avoir réduit 5^s 3^d en sous-divisions de la livre. Le numérateur de cette fraction dont l'unité est la toise, d'après l'énoncé, vaut 560^t 1^{pi} 6^{po} $10^{li}\,\frac{4}{5}$: ce nombre divisé par 21, donne le quotient 26^t 4^{pi} 0^{po} $10^{li}\,\frac{4}{5}$. Les données de cette question sont encore les mêmes que celles des deux précédentes, et on remarquera que le quotient 26^l 13^s 7^d, qu'on a trouvé pour réponse à la première de ces deux questions, n'est autre chose que $26^l\,\frac{163}{240}$ qui est aussi la réponse à la seconde, et qu'enfin si dans la question précédente, on compte des toises au lieu de livres, le quotient $26\,\frac{163}{240}$ devient 26to 4^{pi} 0^{po} $10^{li}\,\frac{4}{5}$, c'est-à-dire, celui de la question présente.

12.e Exemple. *Chercher combien on fera faire de toises pour* 1^l, *en supposant que* $642^{to}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$ *coûtent* 89^l ?

La question revient évidemment à diviser $642^{to}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$ par 89, et à compter le quotient en toises. On a cette opération.

$$\begin{array}{l|l}
642^t\quad 5^{pi}\quad 6^{po}\quad 4^{li}\ \frac{3}{5} & 89 \\
\hline
19 & 7^t\ 1^{pi}\ 4^{po}\ 1^{li}\ \frac{178}{445} \text{ ou } \frac{2}{5} \\
6 & \\
\hline
119^{pi} & \\
30^{pi} & \\
12 & \\
\hline
366^{po} & \\
10^{po} & \\
12 & \\
\hline
124^{li} & \\
35^{li} & \\
5 & \\
\hline
178 &
\end{array}$$

On réduit en cinquièmes les 35^{li} qui restent de la division de 124 par 89, et au produit 175 on ajoute 3; on a donc 178 cinquièmes à diviser par 89, ce qui donne $\frac{178}{445}$ ou $\frac{2}{5}$

13.e Exemple. *Trouver combien de fois* $642^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$ *contiennent* 89 *toises ?*

Dans cette question, le quotient est un nombre abstrait, c'est-à-dire, le rapport $\frac{642^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}}{89^t} = \frac{642\ \frac{3983}{4320}}{89}$, en réduisant $5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$ en fraction de la toise : si on évalue la fraction, on trouve le quotient $7 + \frac{967}{4320}$. Si dans l'exemple précédent, on réduit $1^{pi}\ 4^{po}\ 1^{li}\ \frac{2}{5}$ en fraction ordinaire de la toise, on trouve $\frac{967}{4320}$ qui ajoutés à 7, fait $7 + \frac{967}{4320}$, résultat qui, regardé comme abstrait, est le précédent.

14.e Exemple. *A* 89 *toises pour* 1^l, *combien coûteront* $642^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$?

Le nombre cherché de livres doit contenir 1^l autant de fois que $642^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$ contiennent 89^t : pour faire la division, on réduira $5^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}\ \frac{3}{5}$ en fraction de la toise, ce qui donnera $\frac{3983}{4320}$, et pour dividende $642 + \frac{3983}{4320}$ à diviser par 89 : le quotient est $7 + \frac{967}{4320} = 7^l\ 4^s\ 5^d\ \frac{13}{18}$.

On aurait pu regarder le dividende $642 + \frac{3983}{4320}$ comme comptant des

livres, et réduire, dans cette hypothèse, la fraction $\frac{3983}{4320}$ en fraction de la livre, ce qui aurait donné $642^{l}\ 18^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{18}$ à diviser par 89, et le même quotient que ci-dessus.

Il nous reste à parler de la division d'un nombre complexe par un nombre complexe : il peut arriver, comme dans la division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe, que le quotient soit de l'espèce du dividende ou d'une espèce différente : dans le premier cas, il est abstrait ; dans le second, il est concret.

15.e Exemple. *Soit proposé de trouver le prix de la toise, en supposant que* $18^{t}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ *aient coûté* $99^{l}\ 15^{s}\ 6^{d}$ *?*

Le prix de la toise doit être tel que répété autant de fois que la toise est contenue dans $18^{t}\ 4^{pi}\ 6^{po}$, c'est-à-dire, $18\ \frac{3}{4}$ fois, on ait pour produit $99^{l}\ 15^{s}\ 6^{d}$; donc en divisant ce nombre de livres par $18\ \frac{3}{4}$ ou par $\frac{75}{4}$, le quotient qui comptera des livres, sera le prix de la toise. L'opération revient donc à multiplier $99^{l}\ 15^{s}\ 6^{d}$ par 4 et à diviser le produit par 75, ce qui donne pour résultat $5^{l}\ 6^{s}\ 5^{d}\ \frac{3}{25}$.

16.e Exemple. *Si pour* $154^{l}\ 12^{s}\ 6^{d}$ *on fait faire* $5557^{t}\ 5^{pi}\ 5^{po}\ 6^{li}$*, combien fera-t-on faire de toises pour* 1^{l} *?*

Le nombre cherché de toises, doit être tel qu'en le répétant autant de fois qu'une livre est dans $154^{l}\ 12^{s}\ 6^{d}$, ou qu'en le multipliant par le rapport abstrait $154\ \frac{5}{8} = \frac{1237}{8}$, on ait pour produit $5557^{t}\ 5^{pi}\ 5^{po}\ 6^{l}$:

donc en divisant ce nombre de toises par $\frac{1237}{8}$, ou en le multipliant

par $\frac{8}{1237}$, on aura le résultat cherché, savoir, $35^{t}\ 5^{pi}\ 8^{po}$.

17.e Exemple. *Trouver combien de fois* $36^{l}\ 9^{s}\ 2^{d}$ *contiennent* $5^{l}\ 4^{s}\ 2^{d}$ *?*

Cette division revient à celle de $\frac{8750^{l}}{240}$ par $\frac{1250^{l}}{240}$, ou à celle de $\frac{875}{24}$

par $\frac{125}{24}$, ou enfin à celle des nombres abstraits 875 par 125 dont le quotient est 7.

18.e Exemple. *Trouver combien coûteront* $108^{t}\ 4^{pi}\ 3^{po}\ 6^{li}$*, en supposant que* $15^{t}\ 5^{pi}$ *coûtent* 1^{l} *?*

Le quotient doit contenir 1^{l} autant de fois que $108^{t}\ 4^{pi}\ 3^{po}\ 6^{li}$ contiennent $15^{t}\ 5^{pi}$, c'est-à-dire, un nombre de fois indiqué par le rapport $\frac{108^{t}\ 4^{pi}\ 3^{po}\ 6^{li}}{15^{t}\ 5^{pi}} = 6^{l} + \frac{395}{456} = 6^{l}\ 17^{s}\ 3^{d}\ \frac{17}{19}$. Cette question comparée à celle où on aurait à chercher combien de fois $108^{t}\ 4^{pi}\ 3^{po}\ 6^{li}$ contiennent $15^{t}\ 5^{pi}$, en diffère par l'espèce du quotient qui, dans ce dernier cas, est abstrait.



CHAPITRE XV.

Exposition du nouveau Système métrique.

(134) On ne peut voir le nombre prodigieux de mesures en usage, non-seulement chez les différens peuples, mais même dans la même nation; leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs, la difficulté de les connaître et de les comparer, enfin l'embarras et les fraudes qui en résultent dans le commerce, sans regarder comme l'un des plus grands services que les gouvernemens puissent rendre à la société, l'adoption d'un système de mesures dont les divisions uniformes se prêtent le plus facilement au calcul, et qui dérivent de la manière la moins arbitraire d'une mesure fondamentale, indiquée par la nature elle-même. Un peuple qui se donnerait un semblable système, réunirait à l'avantage d'en recueillir les premiers fruits, celui de voir son exemple suivi par les autres peuples dont il deviendrait ainsi le bienfaiteur; car l'empire lent mais irrésistible de la raison, l'emporte à la longue sur les jalousies nationales, et sur tous les obstacles qui s'opposent à un bien dont l'utilité est généralement sentie. Tels furent les motifs qui déterminèrent *l'Assemblée constituante de France* à charger *l'Académie des Sciences* de cet important ouvrage.

L'identité du calcul décimal et de celui des nombres entiers, ne laisse aucun doute sur les avantages de toutes les espèces de mesures. en parties décimales. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les difficultés des multiplications et des divisions complexes, avec la facilité des mêmes opérations sur les nombres décimaux, facilité

qui devient encore plus graude au moyen des logarithmes dont on pourrait rendre par des instrumens simples et peu coûteux, l'usage extrêmement populaire.

Il est fâcheux que notre *échelle arithmétique* ne soit point divisible par 3 et par 4, deux diviseurs que leur simplicité rend extrêmement usuels. A la vérité, l'addition de deux nouveaux caractères eût suffi pour lui procurer cet avantage (*Chap.* II); mais un changement aussi considérable aurait été infailliblement rejeté avec le système de mesures qu'on lui aurait subordonné. D'ailleurs, l'échelle duodécimale a l'inconvénient d'exiger que l'on retienne les produits des douze premiers nombres, ce qui surpasse l'ordinaire étendue de la mémoire à laquelle l'échelle décimale est mieux proportionnée. Enfin, par l'adoption de l'arithmétique duodécimale, on se serait privé de l'avantage qui, probablement, a présidé à l'invention de notre système décimal, celui de faire servir les doigts à la numération. On ne balança donc point à adopter la division décimale; et pour mettre de l'uniformité dans le système des mesures, on résolut de les dériver toutes d'une même mesure linéaire, et de ses divisions décimales. La question fut ainsi réduite au choix de cette mesure universelle à laquelle on imposa le nom de *mètre*.

La longueur du pendule qui bat les secondes, et celle du méridien terestre, sont les deux grands moyens que la nature a mis à notre disposition, pour fixer l'unité des mesures linéaires. Ils ne peuvent éprouver d'altération sensible que par de très-grands changemens dans la constitution physique de la terre.

Le premier moyen, d'un usage facile, a l'inconvénient de faire dépendre la mesure de la distance de deux élémens qui lui sont hétérogènes, la pesanteur et le temps dont la division est d'ailleurs arbitraire, et dont on ne pouvait admettre la division sexagésimale pour fondement d'un système décimal de mesures. On se déter-

mina donc pour le second moyen, qui paraît avoir été employé dans la plus haute antiquité, tant il est naturel à l'homme de rapporter les mesures itinéraires aux dimensions mêmes du globe qu'il habite, en sorte qu'en se transportant sur ce globe, il connaisse, par la seule dénomination de l'espace parcouru, le rapport de cet espace au circuit entier de la terre. On trouve encore en cela l'avantage de faire correspondre les mesures nautiques avec les mesures célestes. Souvent le navigateur a besoin de déterminer, l'un par l'autre, le chemin qu'il décrit et l'arc céleste compris entre les zéniths des lieux de son départ et de son arrivée. Il est donc intéressant que l'une de ces mesures soit l'expression de l'autre, à la différence près des unités. Mais pour cela, l'unité fondamentale des mesures linéaires doit être une partie aliquote du *méridien terrestre* (*) qui corresponde à l'une des divisions de la circonférence. Ainsi, le choix du mètre fut réduit à celui de l'unité des angles.

L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan, et de la hauteur des objets sur l'horizon. D'ailleurs, c'est dans le premier quart de la circonférence que se forment les sinus, et généralement toutes les lignes qu'emploie la trigonométrie, et dont les rapports avec le rayon ont été réduits en tables (**). Il était donc naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et le quart de la circonférence pour l'unité de leurs mesures, ou pour l'unité d'arc. On le divisa en parties décimales, et pour avoir des mesures correspondantes sur la terre, on divisa de la même manière le méridien terrestre, ce qui a été fait dans l'antiquité ; car, la mesure de la terre, citée par *Aristote*, et dont l'origine est inconnue, donne 100 mille

---

(*) Voyez mon *Exposition du Système du Monde*.
(**) Voyez ma *Géométrie*.

stades au quart du méridien : il ne s'agissait plus que d'avoir exactement sa longueur. Les *savans français* l'ont conclue de celle de l'arc qui traverse la France depuis *Dunkerque* jusqu'aux *Pyrénées*, et qui fut mesuré en 1740. Mais une nouvelle mesure, d'un arc plus grand encore, faite avec des moyens plus exacts, devant inspirer, en faveur du nouveau système des poids et mesures, un intérêt propre à le répandre, on résolut de mesurer l'arc du méridien terrestre entre *Dunkerque* et *Barcelone*. Les opérations que *Delambre* et *Méchain* ont faites, et que *Biot* et *Arago* ont continuées jusqu'à *l'île de Formentera*, donnent le quart du méridien égal à 5130740 toises, longueur dont on a pris la dix-millionième partie pour le *mètre* ou l'unité des mesures linéaires. La décimale au-dessus eût été trop grande, et la décimale au-dessous trop petite. Le mètre dont la longueur est de 0^t, 513074 remplace avec avantage *la Toise* et *l'Aune* de France dans les mesures les plus usuelles.

Toutes les mesures dérivent du mètre de la manière la plus simple; les mesures linéaires en sont des multiples et des sous-multiples décimaux.

L'unité des mesures superficielles pour le terrain, est un carré dont le côté est de dix mètres: elle se nomme *Are* ou *Perche carrée*.

L'unité des mesures de capacité est le cube de la dixième partie du mètre : on lui a donné le nom de *Litre*.

On a nommé *Stère* un volume de bois de chauffage égal à un mètre cube.

L'unité de poids, que l'on nomme *Kilogramme* ou *Livre décimale*, est le poids de la millième partie d'un mètre cube d'eau distillée, considérée dans le vide, et à son *maximum* de densité. (*)

(*) Par une singularité remarquable, ce *maximum* ne répond point au degré de congélation, mais un peu au-dessus; en se refroidissant au-dessous de cette température, l'eau commence à se dilater de nouveau,

Les *étalons* du mètre ne le représentent qu'à un degré déterminé de température, qui est celui de la glace fondante. Les étalons de la livre décimale ne représentent son poids que dans le vide, ou sous une pression insensible de l'atmosphère.

Pour retrouver le mètre dans tous les temps, sans être obligé de recourir à la mesure du grand arc qui l'a donné, il importait de fixer son rapport avec la longueur du pendule. Cet objet a été rempli par *Borda* de la manière la plus précise : ce géomètre a trouvé à l'Observatoire de Paris, $0^{m},741887$ pour la longueur du pendule qui fait 100 mille oscillations par jour.

Toutes les mesures étant sans cesse évaluées en argent, il était sur-tout important de diviser la monnaie en parties décimales: on a donné à son unité le nom de *franc* d'argent. Sa dixième partie s'appelle *décime*; et sa centième partie *centime*. On a rapporté au franc les valeurs des pièces de cuivre et d'or.

Pour faciliter le calcul de l'or et de l'argent fin contenus dans les pièces de monnaie, on a fixé l'alliage au dixième de leur poids, et l'on a égalé le poids du franc à 5 grammes (*Pag.* 188). Ainsi le franc étant un multiple exact du millième de l'unité de poids, comme on le verra bientôt, peut servir à peser les corps, ce qui est utile au commerce.

Enfin, l'uniformité du système entier des poids et mesures, a exigé que le jour fût divisé en dix heures; l'heure en cent minutes; la minute en cent secondes. A la vérité, cette division qui va devenir nécessaire aux astronomes est moins avantageuse dans la vie civile, où l'on a peu d'occasions d'employer le temps comme

---

et se prépare ainsi à l'accroissement de volume qu'elle éprouve dans son passage de l'état fluide à l'état solide. On a préféré l'eau comme étant l'une des substances les plus homogènes et celle qu'on amène le plus facilement à l'état de pureté.

multiplicateur ou comme diviseur. Les difficultés de l'adapter aux horloges et aux montres, et d'autres raisons qu'il est inutile de détailler, ont fait suspendre indéfiniment son usage.

Tel est le nouveau système des poids et mesures que les savans ont offert à la *Convention nationale* qui s'est empressée de le sanctionner. Ce système fondé sur la mesure des méridiens terrestres, convient également à tous les peuples. Il n'a de rapport avec la France que par l'arc du méridien qui la traverse; mais la position de l'arc est si avantageuse, que les savans de toutes les nations, réunis pour fixer la mesure universelle, n'eussent pas fait un autre choix. Pour multiplier les avantages de ce système, et pour le rendre utile aux autres nations, le gouvernement français a invité les puissances étrangères à prendre part à une entreprise d'un intérêt aussi général. Plusieurs ont envoyé à Paris des savans distingués qui, réunis aux commissaires de *l'Institut national* de France, ont déterminé par la discussion des observations et des expériences, les unités fondamentales de poids et de longueur; en sorte que la fixation de ces unités doit être regardée comme un ouvrage commun aux savans qui y ont concouru, et aux peuples qu'ils ont représentés. Il est donc permis d'espérer qu'un jour ce système qui réduit toutes les mesures et leurs calculs à l'échelle et aux opérations les plus simples de l'arithmétique décimale, sera aussi généralement adopté que le système de numération dont il est le complément, et qui, sans doute, eut à surmonter les mêmes obstacles que la force de l'habitude oppose aujourd'hui à l'introduction des nouvelles mesures. Mais, une fois introduites, ces mesures seront maintenues comme notre arithmétique, par ce même pouvoir qui, joint à celui de la raison, assure aux institutions humaines toute la durée dont elles sont susceptibles.

Les tableaux suivans présentent la double nomenclature de ces mesures, de leurs divisions et de leurs multiples.

Quart du méridien . . . . 30784440pi (*)

d'où	$\frac{1}{10}$	3078444
	$\frac{1}{100}$	307844,4
	$\frac{1}{1000}$	30784,44
	$\frac{1}{10000}$	3078,444
	$\frac{1}{100000}$	307,8444
	$\frac{1}{1000000}$	30,78444
	$\frac{1}{10000000}$	3,078444

Ce dernier résultat, qui est la nouvelle unité linéaire, ou le mètre, vaut 3pi 0p 11l $\frac{296}{1000}$

Voici maintenant les douze mots dont se compose la nouvelle nomenclature; nous ferons connaître plus loin les noms synonymes que l'on peut employer dans le commerce :

Mètre, Are, Stère, Litre, Gramme;
Myria, Kilo, Hecto, Déca;
Déci, Centi, Milli.

Les cinq de la première ligne sont ceux des unités des différentes espèces de mesures.

Les quatre suivans, écrits au-dessous des 1.ers, indiquent les multiples dix-mille, mille, cent et dix de ces unités.

Les trois derniers rappellent des dixièmes, des centièmes, des millièmes de ces mêmes unités.

Ainsi, par exemple,

(*) On a trouvé (*pag.* 279) le quart du méridien égal à 5130740t qui, en pieds, c'est-à-dire, multipliées par 6, font 30784440.

Myriamètre	signifie	10000 mètres.
Kilomètre	. . . .	1000
Hectomètre	. . . .	100
Décamètre	. . . .	10
Décimètre	. . . .	$\frac{1}{10}$ de mètre.
Centimètre	. . . .	$\frac{1}{100}$
Millimètre	. . . .	$\frac{1}{1000}$
Hectare	. . . .	100 ares.
Hectolitre	. . . .	100 litres.
Décalitre	. . . .	10 litres.
Décilitre	. . . .	$\frac{1}{10}$ de litre.
Kilogramme	. . . .	1000 grammes.
Hectogramme	. . . .	100
Décagramme	. . . .	10
Décigramme	. . . .	$\frac{1}{10}$ de gramme.
etc.	. . . .	etc.

MESURES ITINÉRAIRES.

Cette dénomination comprend les mesures de grande étendue, telles que le degré terrestre et la lieue. Pour exprimer la distance d'un lieu à un autre, on emploiera les mots *myriamètres* et *kilomètres*.

Mesures itinéraires.	Synonymes.	Valeurs.
Kilomètre.	Mille.	1000 mètres, ou 513 toises.
Myriamètre.	Lieue nouvelle	10 kilomè. ou 10000 mètres.

Mesures linéaires.

Les petites étendues peuvent s'exprimer en *décamètres*, *mètres*, *décimètres*, *centimètres* et *millimètres*.

Mesures linéaires.	Synonymes.	Valeurs.
Décamètre	Perche nouvelle	10 mètres.
Mètre	. . . .	$3^{pi.}\ 0^{p}\ 11^{l}\ \frac{296}{1000}$
Décimètre	Palme	$\frac{1}{10}$ mètre.
Centimètre	Doigt	$\frac{1}{100}$ mètre.
Millimètre	Trait	$\frac{1}{1000}$ mètre.

Le mètre et ses sous-divisions remplacent la toise, le pied, le pouce, etc. ; il tient aussi lieu de l'aune : ainsi le mesurage des draps, toiles, etc., se fera en mètres, décimètres, etc.

Mesures agraires.

Pour exprimer la surface d'un terrain, on fera usage des mots *hectare*, *are* et *centiare*.

Noms des mesures pour les grandes surfaces.	Synonymes.	Valeurs.
Hectare	Arpent	100 ares ou 10000 m. c.
Are	Perche carr.	100 mètres carrés.
Centiare	Mètre carré.	1 mètre carré.

Noms des mesures pour les petites surfaces.	Synonymes.	Valeurs.
Mètre carré.	. . . . .	100 décimètres carrés ou palmes carrés.
Décimèt. carré	Palme carré	100 centimètres carrés ou doigts carrés
Centimèt. carré	Doigt carré	100 millimètres carrés ou traits carrés.

MESURES DE CAPACITÉ POUR LES LIQUIDES.

Les vins et les liqueurs se mesureront avec le *décalitre*, le *litre* et le *décilitre*.

Noms des mesures.	Synonymes.	Valeurs.
Décalitre	Velte	10 lit. ou 10 décimèt. cu.
Litre	Pinte	1 décimètre cube.
Décilitre	Verre	$\frac{1}{10}$ de décimètre cube.

MESURES DE CAPACITÉ POUR LES MATIÈRES SÈCHES.

Le blé, le seigle, etc. doivent être mesurés avec le *kilolitre*, l'*hectolitre*, le *décalitre* et le *litre*.

Noms des mesures.	Synonymes.	Valeurs.
Kilolitre	Muid	10 hectol. ou 1000 dé. cu.
Hectolitre	Setier	10 décal. ou 100 dé. cu.
Décalitre	Boisseau	10 litres ou 10 dé. cu.
Litre	Pinte	décimètre cube.

MESURES DE SOLIDITÉ.

Le mètre cube sera désigné par le mot *stère*, lorsqu'il s'agira de mesurer les bois de chauffage et de charpente; dans ce dernier cas, le stère vaut 10 décistères ou solives nouvelles. Dans l'exploitation des terres ou des pierres, et dans le toisé des corps massifs, on exprimera la solidité en mètres cubes, et en sous-divisions du mètre cube.

DES POIDS.

Pour peser les marchandises, on se sert du *kilogramme*, de l'*hectogramme*, du *décagramme* et du *décigramme*.

Noms des poids.	Synonymes.	Valeurs.
Kilogramme	Livre nouvelle	10 hectogrammes.
Hectogramme	Once	10 décagrammes.
Décagramme	Gros	10 grammes.
Gramme	Denier	10 décigrammes.
Décigramme	Grain	$\frac{1}{10}$ gramme.

Les fortes pesées s'évalueront en milliers, chacun de mille livres nouvelles, et en quintaux, chacun de cent livres nouvelles.

Monnaies.

L'unité monétaire, comme on l'a vu ci-dessus, est assujétie au système général des mesures prises dans la nature : elle se subdivise en *décimes* et en *centimes*.

Les monnaies d'or, ainsi que celles d'argent, contiennent un dixième d'alliage et neuf-dixièmes de métal pur.

La proportion de valeur de l'or à l'argent est de 15,5 à 1.

Le kilogramme d'or vaut, à-peu-près, 3390 francs.

En général, le titre est 900 millièmes.

La *tolérance* du titre, 2 millièmes sur l'or, 3 millièmes sur l'argent, en dessus et en dessous.

Pièces de 40 francs	12gr, 9032
Avec tolérance du poids en dedans	12, 8774
Avec tolérance en dehors	12, 9290
Pièces de 5 francs	25gr
Avec tolérance du poids en dedans	24, 925
Avec tolérance en dehors	25, 075

Les pièces de 40 francs ont 26 millimètres de diamètre; celles de 20 francs ont 21 millimètres; de sorte que 34 pièces de 20 francs et 11 de 40 francs mises l'une à côté de l'autre et en contact, donneront par la somme de leurs diamètres, la longueur du mètre.

Tables pour réduire un nombre quelconque de mesures *linéaires* anciennes en mesures nouvelles, et réciproq.t

Nomb.	Lieues terrestres en kilomèt.	Lieues marines en kilomèt.	Nomb.	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	Nomb.	Aunes en mètres.	Nomb.	Fract. d'aunes en mèt.	Nomb.	Fract. d'aunes en mèt.	Nomb.	Fract. d'aunes en mèt.
1	4,4444	5,5556	1	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256	1	1,18845	1/2	0,594	5/8	0,743	7/16	0,520
2	8,8889	11,1111	2	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512	2	2,37689	1/3	0,396	7/8	1,040	9/16	0,669
3	13,3333	16,6667	3	5,84711	0,97452	0,081210	0,006768	3	3,56534	2/3	0,792	1/12	0,099	11/16	0,817
4	17,7778	22,2222	4	7,79615	1,29936	0,108280	0,009024	4	4,75378	1/4	0,297	5/12	0,495	13/16	0,966
5	22,2222	27,7778	5	9,74519	1,62420	0,135350	0,011280	5	5,94223	3/4	0,891	7/12	0,693	15/16	1,114
6	26,6667	33,3333	6	11,69422	1,94904	0,162419	0,013536	6	7,13068	1/6	0,198	11/12	1,089		
7	31,1111	38,8889	7	13,64326	2,27388	0,189489	0,015792	7	8,31912	5/6	0,990	1/16	0,074		
8	35,5556	44,4444	8	15,59230	2,59872	0,216559	0,018048	8	9,50757	1/8	0,149	3/16	0,223		
9	40,0000	50,0000	9	17,54133	2,92356	0,243629	0,020304	9	10,69601	3/8	0,446	5/16	0,371		
10	44,4444	55,5556	10	19,49037	3,24840	0,270699	0,022560	10	11,88446						

Nomb.	Kilomet. en lieues terrestres.	Kilomet. en lieues marines.	Nomb.	Mètres en toises.	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	Nomb.	Mètres en aunes de Paris.	Frac. d'au.s décim.	Frac. d'au.s ord.	Frac. d'au.s décim.	Frac. d'au.s ord.	Frac. d'au.s décim.	Frac. d'au.s ord.
1	0,225	0,18	1	0,51307	3,07844	36,9413	443,296	1	0,84144	0,063	1/16	0,417	5/12	0,813	13/16
2	0,450	0,36	2	1,02615	6,15689	73,8827	886,592	2	1,68287	0,083	1/12	0,438	7/16	0,833	5/6
3	0,675	0,54	3	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	3	2,52431	0,125	1/8	0,500	1/2	0,875	7/8
4	0,900	0,72	4	2,05230	12,31378	147,7653	1773,184	4	3,36574	0,167	1/6	0,563	9/16	0,917	11/12
5	1,125	0,90	5	2,56537	15,39222	184,7067	2216,480	5	4,20718	0,188	3/16	0,583	7/12	0,938	15/16
6	1,350	1,08	6	3,07844	18,47066	221,6480	2659,775	6	5,04861	0,250	1/4	0,625	5/8		
7	1,575	1,26	7	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071	7	5,89005	0,313	5/16	0,667	2/3		
8	1,800	1,44	8	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367	8	6,73148	0,333	1/3	0,688	11/16		
9	2,025	1,62	9	4,61767	27,70600	332,4720	3989,663	9	7,57292	0,375	3/8	0,750	3/4		
10	2,250	1,80	10	5,13074	30,78444	369,4135	4432,959	10	8,41435						

Tables pour réduire un nombre quelconque de mesures *agraires* anciennes en mesures nouvelles, et récipro.[1]

Nomb.	Toises carrées en mètres carrés.	Pieds carrés en mètres carr.	Pouces carrés en mètres carrés.	Lignes carrées en mètres carrés.	Nomb.	Lieues carrées en myriamètres carrés.	Lieues carrées en myriares.	Arp. Eaux et F. en hec. ou perc. carrées en ares.	Arp. de Paris en hect. ou perch. carrées en ares.
1	3,798744	0,105521	0,00073278	0,000005089	1	0,1975309	19,75309	0,510720	0,341887
2	7,597487	0,211041	0,00146556	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	11,396231	0,316562	0,00219834	0,000015267	3	0,5925926	59,25926	1,532060	1,025661
4	15,194975	0,422083	0,00293112	0,000020356	4	0,7901234	79,01234	2,042880	1,367548
5	18,993718	0,527604	0,00366390	0,000025445	5	0,9876543	98,76543	2,553600	1,709435
6	22,792462	0,633124	0,00439668	0,000030534	6	1,1851852	118,51852	3,064320	2,051322
7	26,591205	0,738645	0,00512946	0,000035623	7	1,3827160	138,27160	3,575040	2,393209
8	30,389949	0,844166	0,00586224	0,000040712	8	1,5802469	158,02469	4,085760	2,735096
9	34,188693	0,949686	0,00659502	0,000045801	9	1,7777777	177,77777	4,596480	3,076983
10	37,987436	1,055207	0,00732780	0,000050890	10	1,9753086	197,53086	5,107200	3,418870

Nomb.	Mètres carrés en toises carrées.	Mètres carr. en pieds carrés.	Mètres carrés en pieds carrés.	Mètres carrés en lignes carrées.	Nomb.	Myriamètres carrés en lieues carrées.	Myriares en lieues carrées.	Hectares en arp. E. et F. ou ares en perc. carrées.	Hectares en arp. de Paris ou ares en perc. carrées.
1	0,263245	9,47682	1364,66	196511	1	5,0625	0,050625	1,958020	2,924943
2	0,526490	18,95363	2729,32	393023	2	10,1250	0,101250	3,916040	5,849886
3	0,789735	28,43045	4093,99	589534	3	15,1875	0,151875	5,874060	8,774829
4	1,052980	37,90726	5458,65	786045	4	20,2500	0,202500	7,832080	11,699772
5	1,316225	47,38408	6823,31	982557	5	25,3125	0,253125	9,790100	14,624715
6	1,579469	56,86090	8187,97	1179068	6	30,3750	0,303750	11,748120	17,549658
7	1,842714	66,33771	9552,63	1375579	7	35,4375	0,354375	13,706140	20,474601
8	2,105959	75,81453	10917,30	1572090	8	40,5000	0,405000	15,664160	23,399544
9	2,369204	86,29134	12281,96	1768602	9	45,5625	0,455625	17,622180	26,324487
10	2,632449	94,76816	13646,62	1965113	10	50,6250	0,506250	19,580200	29,249430

Tables pour réduire un nombre quelconque de mesures *cubiques* anciennes en mesures nouvelles, et réciproq.t

Nomb.	Toises cubes en mètres cubes.	Pieds cubes en mètres cubes.	Pouces cubes en mètres cubes.	Lignes cubes en mètres cubes.	Nomb.	Cordes de bois, Eaux et Forêts, en steres.	Solives (charpente) en stères ou mètres cubes.
1	7,40389	0,0342773	0,000019836	0,0000001148	1	3,8391	0,10283
2	14,80778	0,0685545	0,000039673	0,0000002296	2	7,6781	0,20566
3	22,21167	0,1028318	0,000059509	0,0000003444	3	11,5172	0,30850
4	29,61556	0,1371090	0,000079346	0,0000004592	4	15,3562	0,41133
5	37,01945	0,1713863	0,000099182	0,0000005740	5	19,1953	0,51416
6	44,42334	0,2056636	0,000119018	0,0000006888	6	23,0343	0,61699
7	51,82723	0,2399408	0,000138855	0,0000008036	7	26,8734	0,71982
8	59,23112	0,2742181	0,000158691	0,0000009184	8	30,7124	0,82265
9	66,63501	0,3084953	0,000178528	0,0000010332	9	34,5515	0,92549
10	74,03890	0,3427726	0,000198364	0,0000011480	10	38,3905	1,02832
Nomb.	Mètres cubes en toises cubes.	Mètres cubes en pieds cubes.	Mètres cubes en pouces cubes.	Mètres cubes en lignes cubes.	Nomb.	Steres en cordes de bois (Eaux et Forêts.)	Mètres cubes en solives.
1	0,135064	29,1739	50412,42	87112655	1	0,26048	9,7246
2	0,270128	58,3477	100824,83	174225310	2	0,52096	19,4492
3	0,405192	87,5216	151237,25	261337965	3	0,78144	29,1739
4	0,542057	116,6954	201649,66	348450619	4	1,04192	38,8985
5	0,675321	145,8693	252062,08	435563274	5	1,30241	48,6231
6	0,810385	175,0431	302474,50	522675929	6	1,56289	58,3477
7	0,945449	204,2170	352886,91	609788584	7	1,82337	68,0723
8	1,080513	233,3908	403299,33	696901239	8	2,08385	77,7970
9	1,215577	262,5647	453711,74	784013894	9	2,34433	87,5216
10	1,350641	291,7385	504124,16	871126549	10	2,60481	97,2462

Tables pour réduire un nombre quelconque de mesures de *capacité* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

Nomb.	Pintes de Paris en litres.	Muids de vin de Paris en hectol.	Septiers de blé de Paris en hectol.	Boisseaux en litres.	Litrons en litres.
1	0,9313	2,6822	1,5610	13,008	0,8130
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,2440	52,033	3,2521
5	4,6566	13,4110	7,8050	65,042	4,0651
6	5.5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4506	21,4576	12,4880	104,066	6,5042
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172
10	9,3132	26,8220	15,6100	130,083	8,1302

Nomb.	Litres en pintes de Paris.	Hectol. en muids de v. de Paris.	Hectol. en septiers de blé de Par.	Litres en boisseaux.	Litres en litrons.
1	1,0737	0,3728	0,6406	0,07687	1,2300
2	2,1475	0,7457	1,2812	0,15375	2,4600
3	3,2212	1,1185	1,9219	0,23062	3,6900
4	4,2950	1,4913	2,5625	0,30750	4,9199
5	5,3687	1,8642	3,2031	0,38437	6,1499
6	6,4424	2,2370	3,8437	0,46124	7,3799
7	7,5162	2,6098	4,4843	0,53812	8,6099
8	8,5899	2,9826	5,1250	0,61499	9,8399
9	9,6637	3,3555	5,7656	0,69187	11,0699
10	10,7374	3,7283	6,4062	0,76874	12,2998

Tables pour réduire un nombre quelconque de *poids* anciens en poids nouveaux, et réciproquement.

Nomb.	Livres en kilogram.	Onces en kilogram.	Gros en kilogram.	Grains en kilogramm.	Quintaux en myriagr.
1	0,48951	0,03059	0,003824	0,0000531	4,8951
2	0,97901	0,06119	0,007648	0,0001062	9,7901
3	1,46852	0,09178	0,011472	0,0001593	14,6852
4	1,95802	0,12238	0,015296	0,0002124	19,5802
5	2,44753	0,15297	0,019120	0,0002655	24,4753
6	2,93704	0,18356	0,022944	0,0003186	29,3704
7	3,4265	0,21416	0,026768	0,0003717	34,2654
8	3,91605	0,24475	0,030592	0,0004248	39,1605
9	4,40555	0,27535	0,034416	0,0004779	44,0555
10	4,89506	0,30594	0,038240	0,0005310	48,9506

Nomb.	Kilogram. en livres.	Kilogr. en onces.	Kilogr. en gros.	Kilogramm. en grains.	Myriagr. en quintaux.
1	2,04288	32,686	261,49	18827,15	0,20429
2	4,08575	65,372	522,98	37654,30	0,40858
3	6,12863	98,058	784,46	56481,45	0,61286
4	8,17150	130,744	1045,95	75308,60	0,81715
5	10,21438	163,430	1307,44	94135,75	1,02144
6	12,25726	196,116	1568,93	112962,90	1,22573
7	14,30013	228,802	1830,42	131790,05	1,43001
8	16,34301	261,488	2091,90	150617,20	1,63430
9	18,38588	294,174	2353,39	169444,35	1,83859
10	20,42876	326,860	2614,88	188271,50	2,04288

Nous avons extrait de l'ouvrage de M. *Haros*, qui a pour titre : *Instruction abrégée sur les nouvelles Mesures*, le tableau suivant, qui offre des résultats curieux, et qui peuvent être utiles dans quelques cas : l'auteur les a obtenus par les fractions continues.

Rapports très-approchés des nouvelles Mesures aux anciennes, exprimés en nombres entiers.

4 myriamètres, ou lieues nouvelles, valent 9 lieues terrestres.
82 mètres valent 69 aunes (de Paris).
76 mètres valent 39 toises.
13 décimètres ou palmes, valent 4 pieds.
19 centimètres ou doigts, valent 7 pouces.
9 millimètres ou traits, valent 4 lignes.
24 hectares ou arpens, valent 47 arpens (Eaux et Forêts).
24 ares ou perches carrées, valent 47 perches carrées (*idem*)
40 hectares ou arpens, valent 117 arpens (de Paris).
40 ares ou perches carrées, valent 117 perches carrées (*idem*).
19 mètres carrés valent 5 toises carrées.
38 décalitres ou veltes valent 51 veltes (de Paris).
27 litres ou pintes, valent 29 pintes (*idem*).
118 kilolitres ou muids de blé, valent 63 muids (de Paris).
64 hectolitres ou setiers, valent 41 setiers (*idem*).
13 décalitres ou boisseaux, valent 10 boisseaux (*idem*).
13 litres ou litrons, valent 16 litrons (de Paris).
37 mètres cubes valent 5 toises cubes.
96 stères valent 25 cordes de bois (Eaux et Forêts).
36 décistères ou solives, valent 35 solives (Charpente).
70 kilogrammes ou livres, valent 143 livres (poids de marc).
11 hectogrammes ou onces, valent 36 onces.
13 décagrammes ou gros, valent 34 gros.

14 grammes ou deniers, valent 11 deniers.

8 décigrammes ou grains, valent 15 grains.

80 francs valent 81 livres tournois.

Sa Majesté le Roi des Pays-Bas a rendu, sur les Monnaies, un décret qui trouve naturellement place ici, et dont nous allons transcrire littéralement la traduction française.

Art. I.er Les monnaies de l'Etat consisteront dorénavant en *pièces légales* d'or, d'argent et de cuivre, et en pièces à l'usage du commerce, d'or et d'argent.

Art. II. Les monnaies d'argent seront :

1.° Le *Florin*, comme unité monétaire, lequel sera de la même valeur intrinsèque que l'ancien florin frappé dans les provinces septentrionales, et contiendra 200 as (9 grammes et 613 milligrammes) d'argent fin ; puis la pièce de 3 florins au même titre que le florin et de poids proportionné. La subdivision du florin ou de l'*unité monétaire*, sera décimale, le florin étant supposé formé de 100 parties, nommées centièmes.

2.° Les espèces sous-multiples du florin seront :

Des pièces d'un demi-florin ou de *cinquante centièmes*.

Des pièces d'un quart de florin ou de *vingt-cinq centièmes*.

Des pièces d'un dixième de florin ou de *dix centièmes*.

Des pièces d'un vingtième de florin, ou de *cinq centièmes*.

3.° Les pièces de cuivre seront des *centièmes*, c'est-à-dire, centièmes parties du florin, et des *demi-centièmes*, ou deux centièmes parties du florin.

Art. III. Les pièces d'or vaudront dix florins.

Art. IV. Les pièces de monnaie d'argent, seront fabriquées sur le pied suivant :

Le Florin sera de sept esterlings poids de Troye (10 grammes et 766 milligrammes) et au titre de $\frac{893}{1000}$, le tout à la rigueur et sans tolérance de poids ni de titre, afin que cette pièce contienne 200 as (9 grammes et 613 milligrammes) d'argent fin.

Les pièces de trois florins et celles de cinquante centièmes ou demi-florin, seront du même titre et de poids proportionné.

Le quart de florin ou la pièce de 25 centièmes sera au titre de $\frac{569}{1000}$, et contiendra un poids de 88 as (4 grammes et 230 milligrammes), de sorte que cette pièce contiendra 50 as (2 grammes et 403 milligrammes) d'argent fin.

La pièce d'un dixième de florin ou de 10 centièmes, et celle de 5 centièmes, seront au même titre que le quart de florin et de poids proportionné.

Art. V. Il sera fabriqué des pièces de cuivre, savoir, des *centièmes* et des *demi-centièmes* de florin, au poids de 80 as (3 grammes 845 milligrammes) et de 40 as (1 gramme et 922 milligrammes).

Art. VI. La pièce d'or de 10 florins, sera frappée au titre de $\frac{900}{1000}$ et au poids de 140 as (6 grammes et 729 milligrammes) sans tolérance.

(Nous supprimons ce qui a rapport aux figures, légendes, armes, etc.)

Art. VIII. Les monnaies, à l'usage du commerce, seront et resteront telles qu'elles ont été frappées dans les provinces septentrionales.

Le Ducat d'argent, au poids de 18 esterlings, 8 $\frac{2209}{11200}$ as (28 grammes et 78 milligrammes), et au titre de 10 deniers 10 grains $\frac{868}{1000}$.

Le Ryder d'argent, au poids de 21 esterlings, 5 $\frac{59}{89}$ as (32 grammes et 574 milligrammes), et au titre de 11 deniers 5 $\frac{3}{4}$ grains $\frac{937}{1000}$, l'un et l'autre, d'après le remède extrême.

Et le Ducat d'or, au poids de 2 esterlings, 8 $\frac{24}{35}$ as (3 grammes et 494 milligrammes), et au titre de 23 karats 7 grains $\frac{983}{1000}$, l'un et l'autre, d'après le remède extrême.

Comparaison *de quelques mesures étrangères, avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.	POIDS.	Gram.
Ancien pié français	324,7	Liv. poids de marc	489,2
Pié anglais	304,7	Angl. livre troy	372,6
Vare de Castille	836,6	Angl. avoir-du-poise	453,1
Pié du Rhin	313,9	Castille	459,4
De Vienne	316,0	Cologne	467,4
D'Amsterdam	283,0	Vienne	558,6
De Suède	297,1	Amsterdam	491,4
De Russie	354,1	Suède	424,6
De la Chine	320,0	Russie	409,5

Valeur *des Monnaies étrangères, d'après M.* Bonneville.

Le *titre* (la quantité d'argent ou d'or) est exprimé en millièmes de la pièce, et la valeur en monnaies de France.

ANGLETERRE.	TITRE.	VALEUR.
Couronne (Crown) à 5 schillings	0,917	6f. 02c.
Schilling	0,920	1 20
Guinée, de Georges III	0,917	26 26
AUTRICHE ET BOHÊME.		
Double souverain d'or	0,915	34 89
Species reichsthaler	0,830	5 10
Florin (Gulden) à 60 kreutzers	0,833	2 56
10 Kreutzers	0,486	0 41
Ducat de François II (or)	0,986	11 69
Carolin (or) de Bavière	0,771	25 74
Max. d'or *idem*	0,768	16 95
Florin d'or d'Hanovre	0,781	8 69
HOLLANDE.		
Florin des Pays-Bas	0,913	2 11
Ducat (or)	0,979	11 42
Ryder (or)	0,917	31 28 (*)
Ducaton (argent)	0,934	6 30
Daler	0,861	5 30
DANEMARCK ET HOLSTEIN.		
Species reichsthaler	0,875	5 55
Christian d'or (Chrétien d'or) dep. 1775	0,905	20 80

(*) Dans le tarif général des monnaies des Pays-Bas, on trouve le *Ryder d'or* de Hollande évalué à 28 francs 44 centimes.

ÉTAT ECCLÉSIASTIQUE.	TITRE.	VALEUR.
Scudo de Pie VI.	0,913	5f. 29c
Testone *idem*	0,913	1 58
Papeto *idem*	0,906	1 03
Paolo *idem*.	0,913	0 53
Zecchino *ou* sequin (or) *idem*.	0,996	11 63
Doppie depuis 1775 *idem*	0,909	17 25
ESPAGNE.		
Piastre, depuis 1772.	0,896	5 29
Pesetas à 4 réaux.	0,813	1 04
Real nuevo à 2 réaux.	0,809	0 52
Real de Vellon.	0,809	0 26
Pistole, depuis 1772 (or)	0,893	20 69
Escudillos, depuis 1786 (or)	0,885	5 33
GÊNES.		
Zecchino.	0,995	11 80
RÉPUBLIQUE HELVÉTIQUE.		
Écu de Bâle à 30 batzen.	0,833	4 23
Florin de Bâle à 15 batzen.	0,833	2 11
Écu de Zurich à 2 florins.	0,844	4 67
Florin de Zurich à 40 schillings.	0,844	2 34
Ducat.	0,978	11 59
NAPLES.		
Scudo à 120 grani, depuis 1784.	0,840	5 04
Ducato à 100 grani, depuis 1784.	0,840	4 18
Pièce de 6 ducati de Ferdinand IV.	0,845	25 59
PARME.		
Ducato, depuis 1784	0,906	5 10
PORTUGAL.		
Crusado à 480 rees.	0,896	2 86
Dobraons.	0,917	169 12
Dobras	0,915	89 97
Mille rees (or)	0,913	8 16
PRUSSE.		
Reichsthaler à 24 groschen	0,740	3 59
Frédéric d'or.	0,901	20 54
RAGUSE.		
Visline ou ragusine	0,576	3 60
ROME.		
Scudo.	0,906	5 27
Zecchino *ou* sequin.	0,996	11 63
Testone.	0,903	1 56

RUSSIE.	TITRE.	VALEUR.
Rouble à 100 kopeck, depuis 1762 .	0,875	4f 01c.
Impérial à 10 roubles (papier-monnaie).	0,969	28 64
SARDAIGNE.		
Scudo à 2 lires 1/2	0,896	4 60
Lira.	. . . .	1 84
Carlino à 25 lires.	0,890	49 03
SAVOIE ET PIÉMONT.		
Scudo à 6 lires, depuis 1775	0,906	6 96
Lira	. . . .	1 16
SAXE.		
Species reichsthaler à 32 groschen. . .	0,833	5 11
Gulden (Florin)	0,830	2 55
Auguste d'or.	0,898	20 48
SICILE.		
Scudo à 12 tari	0,826	4 94
Onzia (or) 1751	0,859	13 00
SUÈDE.		
Species daler à 48 schillings, depuis 1777.	0,875	5 62
Ducat, depuis 1777.	0,977	11 58
TOSCANE.		
Francesconi ou Léopoldini à 10 paoli .	0,913	5 48
Lira	0,913	0 82
Ruspono.	0,997	35 65
Zecchino ou Ruspo.	0,999	11 84
TURQUIE.		
Piastre à 40 paras.	0,500	2 09
Zeri mahoub, depuis 1781	0,803	6 45
Fonduc, depuis 1769.	0,799	9 47
VENISE.		
Ducato à 8 lires.	0,816	4 04
Scudo della croze à 12,4 lires	0,947	6 51
Talero à 10 lires.	0,826	5 19
Zecchino	0,997	11 82
Ducato d'oro.	0,996	7 47
Osella à 3,9 lires	0,948	2 03
ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE.		
Le dollar	0,875	5 16

FIN.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES

DE L'ARITHMÉTIQUE.

Définitions. Les démonstrations des théorèmes sur les équi-différences et les équi-quotiens, se tirent de cette propriété dont jouit toute égalité de n'être pas altérée, lorsqu'on opère de la même manière sur ses deux membres. Nous ne démontrons que quelques propriétés de l'équi-différence ou de la proportion arithmétique, parce qu'elles trouvent peu d'applications : 1.° dans tout équi-quotient ou proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; 2.° quatre nombres tels que le produit de deux d'entr'eux, soit égal au produit des deux autres, pourront former une proportion ; 3.° dans toute proportion géométrique, on peut alterner les moyens entr'eux, et les extrêmes entr'eux ; 4.° on peut écrire les conséquens en place des antécédens, et réciproquement; 5.° lorsque quatre nombres ne sont plus en proportion, le produit des extrêmes n'est plus égal à celui des moyens ; 6.° quatre nombres étant tels que le produit de deux d'entr'eux, ne soit pas égal au produit des deux autres, il n'y a pas lieu à proportion entre ces quatre nombres. Trois termes d'une proportion ordinaire ou deux termes d'une proportion continue, étant donnés, calculer le quatrième terme. On n'altère pas une proportion ou un équi-quotient; 1.° en multipliant ou en divisant les deux termes d'un rapport par un même nombre, et les deux termes de l'autre par un même autre nombre ; 2.° en multipliant ou divisant les deux antécédens par un même nombre, et les deux conséquens par un même autre nombre. Applications. Dans toute proportion ou équi-quotient, 1.° la somme ou la différence des deux termes du premier rapport est à l'antécédent ou au conséquent de ce rapport, comme la somme ou la différence des deux termes du second rapport, est à son antécédent ou à son conséquent; 2.° la somme des deux termes du premier rapport, est à leur différence, comme la somme des deux termes du second rapport est à la différence des mêmes termes. Si l'on multiplie plusieurs proportions par ordre, les produits résultans sont en proportion : d'où on conclut que les puissances ou les racines d'un même indice, de quatre termes en proportions, sont pareillement en proportion.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Règles de Trois simples, directes et inverses.

1.re *Question.* 6 mètres d'un ouvrage ont coûté 36f, combien coûteront 48 mètres du même ouvrage?

2.ᵉ *Question.* 7 ouvriers ont fait un certain ouvrage en 12 jours, en combien de jours 28 ouvriers feront-ils le même ouvrage?

Règles de trois composées, directes et inverses.

1.ʳᵉ *Question.* Un homme marchant 10 heures par jour, a parcouru en 18 jours, 95 myriamètres (mesure itinéraire) : on demande combien il fera de myriamètres en 27 jours, en marchant 9 heures par jour ?

2.ᵉ *Question.* Si 9 ouvriers travaillant 8 heures par jour, ont mis 24 jours à creuser un fossé de 65 mètres de longueur sur 13 de largeur et 5 de profondeur, combien faudra-t-il de jours à 71 ouvriers qui travaillent avec la même activité, et à raison de 11 heures par jour, pour creuser dans le même terrain, un fossé de 327 mètres de longueur sur 18 de largeur et 7 de profondeur. On donne trois solutions de cette question.

3.ᵉ *Question.* 60 ouvriers, en 12 jours, et à raison de 10 heures par jour, ont creusé 5 fossés chacun de 60 mètres de longueur sur 12 de largeur et 7 de profondeur; d'un autre côté, 50 ouvriers, en 24 jours, et à raison de 8 heures par jour, ont creusé trois fossés chacun de 70 mètres de longueur sur 16 de largeur et 6 de profondeur; la dureté du premier terrain est à celle du second dans le rapport de 4 à 5 : on demande quel est, sous ces hypothèses, le rapport des forces des deux bandes d'ouvriers? Deux solutions de cette question.

4.ᵉ *Question.* On emploie deux sections d'écrivains à copier des manuscrits : les uns, plus âgés, ne travaillent que le jour et écrivent en ronde; les autres travaillent la nuit et écrivent en coulée : les premiers, au nombre de 24, ont transcrit en 90 jours, à raison de 8 heures par jour, huit exemplaires d'un certain ouvrage in-4.ᵒ en 6 volumes, composés, terme moyen, de 480 pages chacun, chaque page de 60 lignes, et chaque ligne de 56 lettres : on demande en combien de nuits la seconde section d'écrivains, composée de 30 copistes qui travaillent 6 heures par séance, transcrira 9 exemplaires d'un ouvrage in-folio comportant, l'un portant l'autre, 800 pages, chaque page de 84 lignes, et chaque ligne de 80 lettres : on suppose que la vitesse des premiers copistes soit à celle des seconds dans le rapport de 4 : 5; que la difficulté de travailler le jour est à celle de travailler la nuit, dans le rapport 5 : 6; que celle de la ronde est à celle de la coulée, dans le rapport 6 : 5; qu'enfin la difficulté de lire le premier ouvrage, est à celle de lire le second, dans le rapport 8 : 7. Cette question qui n'est pas résolue, est proposée comme exercice.

On établit un principe d'après lequel on pourra composer sur-le-

champ, la valeur de l'inconnue qui sert de réponse à une question quelque compliquée qu'elle soit, et qui conduit à une règle de trois : ce principe manquait dans les Traités d'Arithmétique.

RÈGLE D'INTÉRÊT.

Notions préliminaires.

1.re *Question.* Une personne a placé 840 francs dans le commerce, à raison de 5 pour % (5 francs pour 100 francs) : on demande ce que devient ce capital au bout d'une année ?

2.e *Question.* On a placé un capital de 100 francs à 5 pour % d'intérêt composé : on demande quelle est la somme qu'on doit retirer, tant en capital qu'en intérêt, au bout de trois ans ? on généralise cette solution, en l'étendant à un capital quelconque et à un nombre quelconque d'années.

3.e *Question.* Quel est l'intérêt d'un capital de 15540f prêté à $\frac{7}{8}$ pour 100f par mois, pour 7 mois et 27 jours ?

4.e *Question.* Ayant une rente de 3500f sur un capital prêté au denier 20, c'est-à-dire, à raison d'un denier de rente pour 20, on demande quelle serait la rente de ce capital, à raison du denier 25 ?

5.e *Question.* Une personne place 10000 francs dont une partie à 5 pour 100, et l'autre à 6 pour 100 : l'intérêt simple est de 1620 francs en 3 ans : on demande quelle est la somme placée à 6 pour 100 par an. Deux solutions de cette question.

6.e *Question.* Un certain capital augmenté des intérêts simples, a valu 1235f après 5 mois, et 1312 francs après 16 mois : on demande quels étaient le capital et le taux de l'argent ?

7.e *Question.* On demande quelle est la somme que doit un tuteur, pour un capital de 1000f, après 3 ans 7 mois et 15 jours, au denier 20 et à intérêts composés ?

8.e *Question.* On demande quelle somme il faudrait prêter pour recevoir au bout de 3 ans 2662 francs, tant pour le capital que pour l'intérêt de l'intérêt, au denier 10, ou à raison de 1 pour 10 ?

On donne la formule générale propre à résoudre toutes les questions d'intérêts composés. Dans une première lecture, on pourra passer ces généralités.

RÈGLE D'ESCOMPTE.

Notions préliminaires où on fait connaître les établissemens de banque. Distinction en escomptes en dehors et escomptes en dedans.

3.e *Question.* On propose d'évaluer en argent comptant deux sommes, l'une de 6000 francs, payable dans 25 mois, l'autre de 27000 francs, payable dans 4 mois, l'intérêt simple de l'argent étant à 2 pour 100 par mois? Trois solutions. Observations.

4.e *Question.* Quelqu'un qui devait payer 1344 francs au bout d'un certain temps, s'acquitte en donnant sur-le-champ 1200 francs, à raison de 3 pour % d'escompte par an: on demande de combien de temps il a anticipé le paiement, en n'ayant égard qu'aux intérêts simples?

De la Tare, des Primes d'assurance, de la Commission, des Pertes et Bénéfices, de l'Avarie.

Toutes ces questions rentrent dans celles de l'escompte, soit en dehors soit en dedans.

Règle de Compagnie ou de Société.

Définition.

1.re *Question.* Trois marchands se sont associés pour une entreprise; le 1.er a mis 600 francs, le second 800 et le troisième 400; ils rompent la société, et veulent partager entr'eux le bénéfice commun qui est de 900 francs: on demande la part qui revient à chacun? Trois solutions.

2.e *Question.* Quatre négocians ont fourni, le premier 16400 francs qui ont été 16 mois dans la société, le second 20500 francs qui y ont été 10 mois, le troisième 40000 francs qui y ont été 6 mois, et le quatrième 50100 francs qui y ont été 4 mois: ils ont gagné 21000 francs: on demande le gain de chacun? Deux solutions.

3.e *Question.* Un débiteur qui ne possède que 2058f 25c, demande combien il peut donner à chacun de ses créanciers, en proportion de la créance de chacun? il est dû au premier 2248f 7c; au second 2030f 8c; au troisième 1426f 10c; au quatrième 1000f.

4.e *Question.* Un négociant failli doit 695745l et ne possède que 196000l; on demande combien il doit donner à chacun de ses créanciers: il est dû au premier 6954l; au second 3454l; au troisième 7964l; au quatrième 22954l; au cinquième 654419l?

5.e *Question.* Cinq particuliers ont fait une entreprise qui a rapporté 48000f de bénéfice: on demande ce qui revient à chacun en proportion de sa mise: le premier est intéressé pour 5s (*); le second pour 6s; le troisième pour 4s; le quatrième pour 3s; le cinquième pour 2s?

(*) C'est-à-dire, qu'il a fourni 5s pour livre, ou le quart de la mise totale; le second les $\frac{6}{20}$ ou les $\frac{3}{10}$ de cette mise, et ainsi des autres.

6.e *Question.* Un homme laisse par testament 48000 francs à trois neveux, à condition qu'ils auront d'autant plus qu'ils seront moins âgés; le premier a 30 ans; le second 25 et le troisième 20 : on demande ce qui revient à chacun?

7.e *Question.* Un homme en mourant laisse 340000 francs, et sa femme en cinte, laquelle ne lui a jamais donné d'enfans : il ordonne que si elle accouche d'un garçon, celui-ci ait les $\frac{3}{5}$ du bien, et la mère les $\frac{2}{5}$; que si elle accouche d'une fille, celle-ci ait $\frac{1}{4}$ du bien, et la mère les $\frac{3}{4}$ restans : il arrive qu'elle accouche d'un garçon et d'une fille qui parviennent à l'âge de majorité : on demande comment il faut partager la succession suivant l'intention du testateur?

Sur les Changes et Arbitrages.

Notions préliminaires.

1.re *Question.* Combien 3000 francs produiront-ils de florins courans d'Amsterdam, en supposant le change du jour à 54 deniers de gros banco pour 3 francs, et l'agio à 5 pour $\frac{0}{0}$, ce qui signifie que 100 florins de banque valent 105 florins courans?

2.e *Question.* Supposons qu'un négociant de Paris ait à faire passer de l'argent à Amsterdam : soit le change de Paris sur Amsterdam à 52 deniers, le change de Paris sur Londres à 23f, le change d'Amsterdam sur Londres, à 10 florins, le change de Paris sur Madrid à 14f, 87, celui d'Amsterdam sur Madrid à 92$\frac{1}{4}$ deniers; quel sera le parti le plus avantageux ou de remettre à Amsterdam du papier sur cette ville, ou d'y envoyer du papier soit sur Londres, pour y être négocié à 10 florins, soit sur Madrid pour y être négocié à 14f, 87.

Remarque où on définit ce qu'on entend par le *certain* et l'*incertain*.

RÈGLES D'ALLIAGE ET DE MÉLANGE.

Règle d'Alliage.

Notions préliminaires.

1.re *Question.* Un affineur a 38 hectogrammes d'or pur; il en veut faire de l'or au titre de 950 millièmes : on demande ce qu'il doit ajouter d'alliage à la fonte?

2.e *Question.* On veut fondre ensemble un certain nombre de grammes d'or ou d'argent, dont 5 au titre de 950 millièmes, 25 à celui de 900 millièmes, 30 à celui de 800 millièmes, et enfin 40 à celui de 750 millièmes; on demande quel sera le titre du gramme du mélange?

3.e *Question.* Un affineur a 60 hectogrammes d'or ou d'argent, au titre de 900 millièmes : on demande combien il doit ajouter d'or ou

d'argent à la fonte pour l'élever au titre de 950 millièmes? Deux solutions. Remarque.

4.e *Question.* Un orfévre ayant cinq kilogrammes d'or ou d'argent au titre de 900 millièmes, 25 kilogrammes idem à 850 millièmes, 70 id. à 750 millièmes : on demande combien il doit ajouter de kilogrammes d'or ou d'argent fin à la fonte de ces 100 kilogrammes, pour élever le titre de cette fonte à celui de 950 millièmes? Deux solutions. Vérification. Remarque.

RÈGLES DE MÉLANGE DIRECTE ET INVERSE.

Règle de Mélange directe.

Définition. Énoncé d'un théorème.

1.re *Question.* On a mêlé ensemble 3 bouteilles de vin à 45s la bouteille, et 2 idem à 30s : on demande le prix de la bouteille de ce mélange?

2.e *Question.* Un marchand a acheté des vins de plusieurs espèces, savoir : 130 bouteilles à 10 décimes la bouteille; 75 idem à 15 décimes; 231 idem à 12 décimes; 27 idem à 20 décimes. Il les mêle ensuite, et on demande ce que vaut la bouteille du mélange?

3.e *Question.* On a mesuré, à diverses reprises, la distance entre deux points assez éloignés; deux fois on a trouvé 3794,48 mètres; trois fois on a trouvé 3795,27 mètres; une fois on a trouvé 3793,115 mètres : on demande la valeur moyenne de la distance?

Règle de Mélange inverse.

Énoncé d'une règle générale pour résoudre ces questions, en ne supposant que deux choses mélangées.

1.re *Question.* Avec de la poudre à canon à 24s la livre, et de la poudre à 14s idem, on voudrait composer un mélange du poids de 10lb, qui coutât 20s la livre : on demande ce qu'il faut prendre du poids de chaque espèce de poudre?

2.e *Question.* Dans quelle proportion doit-on mêler de la poudre à 24s la livre, et de la poudre à 14s la livre, pour que la livre du mélange revienne à 20s?

3.e *Question.* On veut faire un sac de blé à 17f, en mêlant ensemble du blé à 19f, et du blé à 14f ½ le sac : quelle proportion doit-on prendre du sac à 19f et du sac à 14f ½?

Les solutions par les égalités peuvent être omises dans une première lecture.

De la Suite de Rapports égaux.

Définition.

Dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent ; ou comme la somme d'un certain nombre d'antécédens est à celle d'un pareil nombre de conséquens correspondans. Deux démonstrations.

Des Progressions arithmétiques ou Suites par équi-différence.

Définition.

Dans toute progression arithmétique, un terme quelconque est égal au premier, augmenté ou diminué d'autant de fois la différence constante qu'il y a de termes avant celui qu'on considère. Cette propriété sert 1.° à résoudre cette question générale : trois de ces quatre choses, savoir : le 1.er terme, la différence constante, un terme quelconque, le rang de ce terme, étant données, trouver la quatrième : 2.° à intercaler entre deux nombres donnés, autant de nombres qu'on voudra et qu'on nomme *moyens* arithmétiques, sous la condition que ces moyens et les deux extrêmes donnés, constituent une progression arithmétique.

Des Progressions géométriques, ou des Suites par équi-quotiens.

Définition.

Dans toute progression géométrique, un terme quelconque est égal au premier multiplié par le facteur constant élevé à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent celui qu'on considère, ou par le rang de ce terme diminué d'une unité. Cette propriété sert 1.° à résoudre cette question générale, trois de ces quatre choses, savoir : le premier terme, le facteur constant, un terme quelconque, le rang de ce terme, étant données, trouver la quatrième; 2.° à intercaler entre deux nombres donnés, autant de nombres qu'on voudra et qu'on nomme *moyens* géométriques, sous la condition que ces moyens et les deux extrêmes donnés, forment une progression géométrique. Observations à l'occasion des questions résolues sur les progressions arithmétiques et géométriques.

Des Logarithmes.

Définition des logarithmes. Un même nombre peut avoir une infinité de logarithmes : à un même logarithme, répond une infinité de

nombres. Dans tout système de logarithmes, le logarithme de l'unité est zéro. Dans le système tabulaire, le logarithme d'une puissance de 10, est égal à l'exposant de cette puissance. Le logarithme d'un nombre entier autre qu'une puissance de 10, se compose toujours de deux parties, l'une entière qu'on nomme *caractéristique*, laquelle a autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans le nombre correspondant, et l'autre qui est une fraction décimale non terminée (*Alg.*, 1.re *sect.*). Lorsqu'un nombre est décimal et plus grand que l'unité, la caractéristique de son logarithme ne fait connaître que le nombre des chiffres dont se compose la partie entière de ce nombre. On donne une idée du dispositif des tables de logarithmes. Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes des facteurs. Le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre, est le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance. Le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins celui du diviseur. Le logarithme de la racine d'un certain ordre d'un nombre donné, est le quotient du logarithme de ce nombre, divisé par l'ordre ou l'indice de la racine.

De l'usage des Tables de Logarithmes.

Les tables de logarithmes servent à résoudre ces deux questions ; 1.° un nombre étant donné, trouver son logarithme ; 2.° un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant : nous avons divisé la première question en six cas, par rapport au nombre donné, et la seconde en trois, par rapport au logarithme donné. Aux complémens arithmétiques nous substituons les caractéristiques négatives qui ne peuvent faire de difficultés. Applications des logarithmes à l'extraction des racines.

Introduction a la Règle de fausse position.

Étant donnés deux termes quelconques d'une progression arithmétique et leurs indices respectifs, c'est-à-dire, les rangs de ces termes, trouver à quel indice répond ou doit répondre le terme zéro de la progression : énonciation de la règle à suivre pour résoudre cette question. Applications de cette règle à tous les cas qui peuvent avoir lieu.

Règle de fausse position.

Considérations générales sur cette règle.

Au moyen de cette règle, on résout, sans employer le calcul littéral, les problèmes déterminés à une seule inconnue, et plus particulièrement ceux qui n'admettent qu'une solution et qu'on nomme du premier degré. On reconnaît qu'une question est du premier degré, lorsqu'en attribuant à l'inconnue une suite de valeurs en progression arithmé-

tique, les résultats qu'on obtient forment eux-mêmes une progression arithmétique. On est conduit à cette règle pour découvrir la valeur de l'inconnue : supposez à l'inconnue deux valeurs quelconques ou prises au hasard, et que nous désignerons par h et k, et notez les résultats correspondans par m et n; multipliez le premier résultat m par la seconde hypothèse k, et le second résultat n par la première hypothèse h, puis divisez la différence des produits, savoir, $m\times k-n\times h$ par la différence des résultats $m-n$, le quotient sera la vraie valeur de l'inconnue. Cette règle s'applique à des questions d'un degré supérieur au premier, pourvu que l'on ait découvert d'une manière quelconque, une première valeur de l'inconnue.

1.re *Question.* Un père est âgé de 50 ans; le fils en a 12: dans combien d'années, à partir d'aujourd'hui, l'âge du père sera-t-il triple de l'âge du fils?

2.e *Question.* En faisant l'aumône à plusieurs pauvres, et donnant 3s à chacun, on a 9s de reste; mais si on ne donne à chaque pauvre que 2s, on a 12s de reste; on demande combien on a de sous, et combien il y a de pauvres?

3.e *Question.* On propose de partager le nombre 47 en deux parties telles qu'en divisant la plus petite par 3, et la plus grande par 5, la somme des deux quotiens soit onze?

4.e *Question.* On a loué un ouvrier paresseux, à raison de 45s par jour, pour les jours où il travaillerait; mais à condition de lui retenir 12s par chaque jour qu'il ne travaillerait pas: on lui fait son compte au bout de 30 jours, et il arrive qu'on ne lui doit que 39s; on demande combien de jours il a travaillé?

5.e *Question.* On a fait partir de Dreux pour Brest, un courier qui fait 8 kilomètres par heure: huit heures après son départ, on en fait partir un autre de Paris pour Brest, et celui-ci parcourt 12 kilomètres par heure: on demande où ce second courier rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a 68 kilomètres de Paris à Dreux?

6.e *Question.* Les trois héritiers d'une succession la partagent entr'eux de la manière suivante: le premier en prend la moitié moins 1000 francs; le second en prend le tiers moins 800 francs; le troisième en prend le quart moins 600 francs: on demande quel est le montant de la succession?

7.e *Question.* On demande un nombre tel que si on l'ôte de son cube, il reste 1. Cette question, traitée par l'algèbre, conduirait à une équation du troisième degré, dont la solution exigerait l'extraction d'une racine carrée et deux extractions de racine cubique.

A la suite d'un historique succinct des travaux exécutés en France pour mesurer un arc du méridien terrestre, travaux qui se continuent avec persévérance, nous avons exposé dans une série de tableaux la nomenclature des nouvelles mesures et les valeurs des anciennes mesures françaises en nouvelles, et réciproquement. Nous avons aussi fait connaître les dispositions d'un arrêté de Sa Majesté le Roi des Pays-Bas, relatives au nouveau système monétaire. Suivent enfin deux tableaux dont l'un offre la comparaison de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises, et l'autre le titre en millièmes et la valeur en francs des monnaies étrangères.

FIN DE LA TABLE.



OBSERVATIONS.

Chapitre I.

Notions.

Il conviendra de lire les N.os 1, 2, 3 dans l'ordre 2, 1 et 3.

Chapitre IV.

Page 57. 1.o On peut dire que le plus grand multiple de 12, contenu dans 1735, ne diffère du plus grand multiple de 12 contenu dans 17,35 qu'en ce que celui-ci compte des centièmes, et que le reste dû à la seconde division n'est autre que le reste dû à la première, compté aussi en centièmes.

Chapitre IX.

Page 141. Il faut observer que si l'on opère de la même manière sur les deux membres d'une inégalité, le plus grand résultat est toujours dû au plus grand des deux membres.

Chapitre X.

J'ai omis d'observer (*Quest.* 3.e) que le mois, dans le commerce, était de 30 jours.

Chapitre XI.

Page 211. J'ai dit qu'il y avait de l'avantage à faire commencer la suite arithmétique par 0, et la suite géométrique par 1. En effet, que dans la première suite, on cherche le 4.e terme qui avec 0, 8 et 24, par exemple, formeront une proportion arithmétique, on aura pour le déterminer et en le désignant par x,

$$x = 8 + 24 - 0 = 8 + 24 = 32;$$

que dans la seconde suite, on veuille calculer l'extrême qui avec 1, 9 et 729, termes qui répondent aux premiers, formeront une proportion géométrique, on aura, en le notant par y,

$$y = \frac{9 \times 729}{1} = 9 \times 729 = 6561:$$

ces deux termes 32 et 6561 se correspondent encore dans les deux suites. Or, il est clair que le choix des termes 0 et 1, comme premiers des deux suites, a simplifié le calcul des extrêmes dans les deux proportions, puisque, dans la première, on n'a eu à faire que la somme, et dans la seconde que le produit des moyens.

Chapitre XII.

Page 234. Nous avons dit qu'en divisant chacun des membres de

$2x - 6 = 0$ par 3, on avait $x - 3 = 0$; c'est ce qu'on concevra facilement, en ajoutant 6 aux deux membres de la première qui devient alors $2x - 6 + 6 = 6$, ou bien $2x = 6$; divisant celle-ci par 2, on tombe sur $x = 3$; retranchant alors 3 de part et d'autre, on obtient $x - 3 = 3 - 3 = 0$, qui est le résultat du texte.

Page 238. Nous disons que l'erreur due à la première hypothèse, est $- 360^s - 39^s$: en effet, si à $- 360^s$ on ajoutait 360^s, la somme étant zéro, l'erreur serait encore, eu moins, de 39^s : donc, comme d'ailleurs elle est déjà, en moins, de 360, elle sera en moins de $360^s + 39^s$. Autrement, le véritable résultat étant 39^s, une erreur en moins ou une diminution de 39^s, donnerait 0 dont il faut encore retrancher 360^s pour en revenir à $- 360^s$: donc la diminution totale sur 39^s, laquelle constitue l'erreur, a été $- 360^s - 39^s$. On raisonnera de la même manière sur la seconde erreur.

Page 247, 4.e question. Pour calculer la formule $x = \frac{10000}{(1{,}055)^{20}}$ par logarithmes, on aura

$$\log. x = \log. 10000 - 20 \log. (1{,}055)$$
$$\doteq 4 - 0{,}4650500 = 3{,}5349500 = \log. 3427{,}3.$$



ERRATA.

Nota. On pourra, d'après l'errata, corriger les fautes avant de commencer la lecture de l'ouvrage.

Page 7, ligne 16 en remont., supprimez *trente*.

Page 9, ligne 1.re: aux nombres des signes, lisez: *au nombre des signes*.

Page 13, ligne 8: avec le nombre des tranches, lisez; *avec les noms des tranches*.

Page 14, ligne avant-dernière: quels qu'en soit la grandeur et l'ordre, lisez: *quels qu'en soient la grandeur et l'ordre*.

Page 19, ligne 2: dixièmes d'unités, lisez: *dixièmes, d'unités*.

Page 41, au multiple 7, lisez: 92719 71673 50048.

Page 46, ligne 6 en remontant: ils n'ont pas mis le temps et l'application, lisez: *ils n'ont ni le temps ni l'application*.

Page 64, ligne dernière, supprimez les mots: cette multiplication a été faite.

Page 80, ligne 10: prendre le cinquième de $\frac{2}{8}$, lisez: *prendre le cinquième de* $\frac{2}{3}$.

Page 85, ligne 14, en remontant: la fraction $\frac{6930}{9240}$, lisez: $\frac{16170}{21560}$.

Page 98, ligne 14, $\frac{42524}{524959}$, lisez: $\frac{42524}{525949}$.

Page 101, ligne 8: ces deux membres, lisez: *ses deux membres*.

Page 114 et 115, dans les fractions décimales, supprimez la virgule qui précède immédiatement etc.

Page 120, ligne 5: + 486, lisez: + 480.

Page 133, lignes 10 et 11, au lieu de 1,897 et 1,89700000, lisez: 1,987 et 1, 98700000.

Page 139, ligne 3 en remontant: 8:6::4:3, lisez: 8:6 = 4:3.

Page 140, ligne 8: d'où 4:8 = 6:3, lisez: d'où 4:8 = 3:6.

Page 141, ligne 8, au dénominateur, lisez: *au même dénominateur*.

Page idem, ligne 12, en remontant: nombre, lisez: *nombres*.

Page 168, ligne 9, en remontant: 57f,888, lisez: 57f,882.

Page 190, ligne 12, en remont.: la seconde question fournit une autre solution, lisez: *Nous allons donner une autre solution*.

Page 197, ligne 9, à la fin du titre, ajoutez: *Des Logarithmes*.

Page 199, ligne 9: des progressions d'arithmétique, lisez des *progressions arithmétiques*.

ERRATA.

Page 201, ligne 12, en remont. : 10 $= \frac{2}{9}$, lisez : 10 $+ \frac{2}{9}$

Page 218, ligne 7 : $= \frac{456}{100000}$, lisez $\frac{456}{1000000}$.

Page 220 : ont six et même jusqu'à sept chiffres, lisez : *ont cinq et même jusqu'à six chiffres.*

Page 223, ligne 8 : à 0,49233, lisez : *à* 0,49265.

Page 230, ligne 2, en numérateur : au lieu de $-20 + 5$, lisez : -20×5.

Page 231, ligne 12, en dénominateur, $35 - (-50)$, lisez $35 - (-30)$.

Page 239. La note se rapporte à l'énoncé de la 5.e question.

Page 242, ligne 4, en remont. : en dénominateur, au lieu de 0,0075147 33, lisez : 0,0073147 33.

Page id., ligne 3, en remont. : résultat exacte, lisez : *résultat exact.*

Page 252, ligne 1.re, c'est-a-dire, lisez : *c'est-à-dire.*

Page 260, ligne 3 : lisez $+ \frac{1}{15}$

Page 267, ligne 5 : il restera 12po, lisez : *il restera* 10po.

Page 269, ligne 14, et 16 en remont. : au lieu de 11l 7s 11d $\frac{7}{8}$, lisez 11l 7s 3d $\frac{7}{8}$.

Page 272, ligne 8 ; au lieu de 6o 5gr 2d 22gr $\frac{22}{72}$, lisez : 6o 5g 2d 22gr $\frac{32}{72}$

